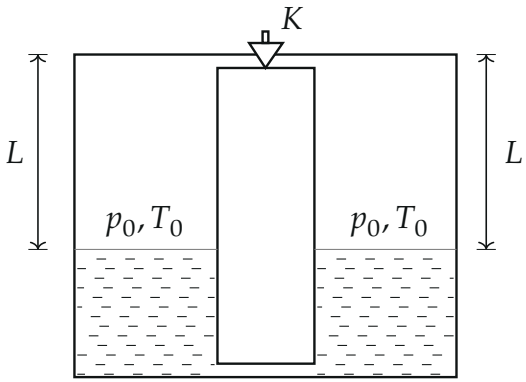
Частичный нагрев

Задача 4. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Частичный нагрев».

Два одинаковых вертикальных цилиндра соединены сверху и снизу трубками пренебрежимо малого объёма. В верхней трубке имеется кран K, который исходно открыт. В цилиндры налита жидкость плотности ρ. Оставшийся объём цилиндров высоты L заполнен газом с давлением p_0 и комнатной температурой T_0. При неизменной температуре газа в левом цилиндре газ в правом нагрели до температуры T и закрыли вентиль. Нагреватель отключили. Когда воздух в правом цилиндре остыл до комнатной температуры, разность уровней жидкости в цилиндрах стала $2h$. Найдите температуру T, если в левом цилиндре температура газа всё время оставалась комнатной. Ускорение свободного падения — g.



▲ **Решение. Что происходит.** Процесс идёт в два этапа. Пока кран открыт, давление газа слева и справа одинаково, поэтому уровни жидкости не сдвигаются и объёмы газа остаются LS; нагретый правый газ вытесняет часть молекул через верхнюю трубку в левый цилиндр. После закрытия крана количество газа в каждом цилиндре фиксировано. Правый газ остывает, его давление падает, жидкость справа поднимается, слева опускается. Это задача на уравнение Менделеева — Клапейрона для двух порций газа плюс гидростатика: перепад давлений газа уравновешивает разность уровней.

Обозначения. S — сечение цилиндра, $\nu_л$ и $\nu_{пр}$ — количества газа слева и справа после закрытия крана, p — давление газа в момент закрытия крана, $p_л$ и $p_{пр}$ — давления газа в конце.

1. Сколько газа в каждом цилиндре. Уравнение Менделеева — Клапейрона для всего газа в начале и для каждой порции в момент закрытия крана (рис. 2): давление p общее, объёмы по LS, температуры T_0 и T,

$$2p_0LS = \nu RT_0, \qquad pLS = \nu_л RT_0, \qquad pLS = \nu_{пр} RT.$$

Газ из цилиндров никуда не уходит: $\nu_л + \nu_{пр} = \nu$. Складываем:

$$\frac{pLS}{R}\left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T}\right) = \frac{2p_0LS}{RT_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2p_0T}{T + T_0}.$$

Знак: $p > p_0$ при $T > T_0$ — давление в обоих цилиндрах выросло.

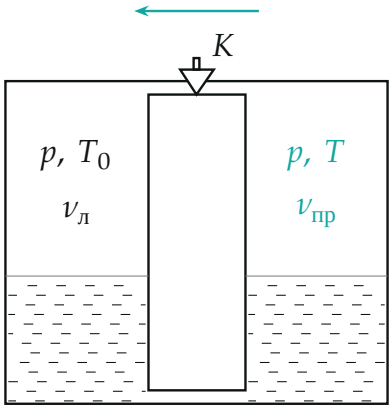


Рис. 2. Кран открыт, правый газ нагрет до T: давления одинаковы, уровни на месте; часть газа перешла через верхнюю трубку влево (стрелка). В этот момент кран закрывают.

2. Конечное состояние. После закрытия крана жидкость справа поднялась на h, слева опустилась на h (жидкость несжимаема, сечения равны): объёмы газа $(L + h)S$ слева и $(L - h)S$ справа (рис. 3). Температура обоих газов T_0. Уравнение Менделеева — Клапейрона для каждой пор-

ции:

$$p_{\text{л}} = \frac{\nu_{\text{л}} R T_0}{(L+h)S} = \frac{pL}{L+h'}, \qquad p_{\text{пр}} = \frac{\nu_{\text{пр}} R T_0}{(L-h)S} = \frac{pL}{L-h} \cdot \frac{T_0}{T}.$$

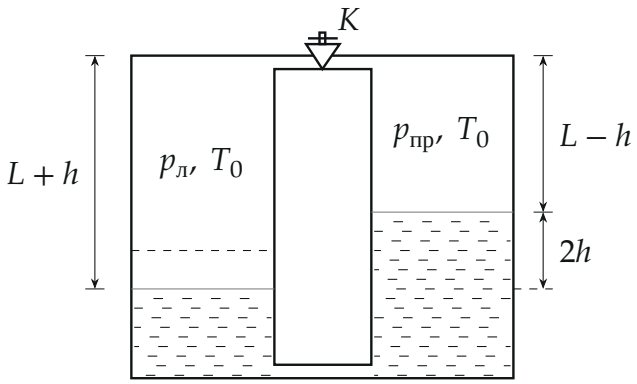


Рис. 3. Кран закрыт, правый газ остыл до T_0: уровень справа выше на $2h$. Пунктир слева — прежний уровень, справа — уровень жидкости в левом цилиндре.

3. Гидростатика. Жидкость в нижней части покоится, поэтому давление на одном горизонтальном уровне (на уровне жидкости в левом цилиндре) одинаково слева и справа. Слева это $p_{\text{л}}$, справа — $p_{\text{пр}}$ плюс давление столба жидкости высотой $2h$ (рис. 3):

$$p_{\text{л}} = p_{\text{пр}} + 2\rho g h.$$

Газ на этой высоте жидкости весит ничтожно мало, и его давление по высоте считаем постоянным.

4. Уравнение для T. Подставляем давления из пунктов 1–2:

$$\frac{2p_0 T}{T+T_0} L \left(\frac{1}{L+h} - \frac{T_0}{T(L-h)} \right) = 2\rho g h.$$

Умножаем на $(T+T_0)(L+h)(L-h)$:

$$p_0 L (T(L-h) - T_0(L+h)) = \rho g h (L^2 - h^2)(T+T_0).$$

Собираем слагаемые с T слева, с T_0 — справа:

$$T\,(L-h)(p_0L-\rho gh(L+h)) = T_0\,(L+h)(p_0L+\rho gh(L-h)),$$

$$T = T_0\,\frac{(L+h)(p_0L+\rho gh(L-h))}{(L-h)(p_0L-\rho gh(L+h))}.$$

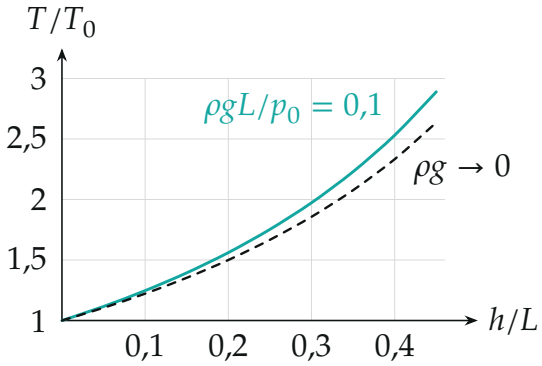


Рис. 4. Нужная температура нагрева в зависимости от h/L (по формуле ответа). Пунктир — предел невесомой жидкости, $T/T_0 = (L+h)/(L-h)$.

Обратите внимание. При открытом кране газ перетекает между цилиндрами, и в правом его остаётся меньше — именно поэтому после остывания давление справа ниже, чем слева. Применять уравнение состояния к правому газу «от начала до конца» нельзя: его количество поменялось.

Проверка. При $T = T_0$ из уравнения пункта 4: $p_0L\cdot(-2h) = \rho gh(L^2-h^2)\cdot 2T_0/T_0$ возможно только при $h = 0$ — нагрева нет, уровни не сдвинулись. Предел невесомой жидкости $\rho g \to 0$: $T = T_0(L+h)/(L-h)$ — давления слева и справа в конце равны, $\nu_л/(L+h) = \nu_{пр}/(L-h)$, а $\nu_л/\nu_{пр} = T/T_0$ — то же самое. Знаменатель обращается в нуль при $p_0L = \rho gh(L+h)$: столб $2h$ не удержать при сколь угодно сильном нагреве — поэтому кривая на рис. 4 уходит вверх быстрее пунктира. Смысл: чем сильнее нагрели правый газ, тем больше молекул ушло влево и тем выше поднимется жидкость справа после остывания.

Ответ. $T = T_0\,\dfrac{(L+h)(p_0L+\rho gh(L-h))}{(L-h)(p_0L-\rho gh(L+h))}.$