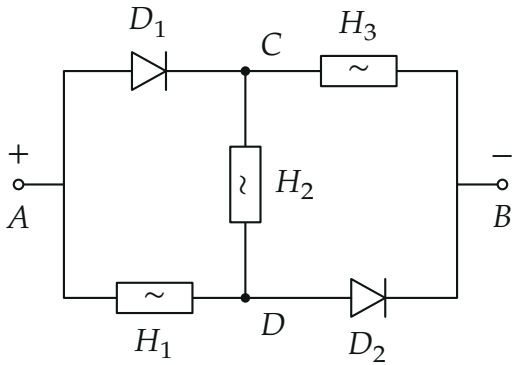
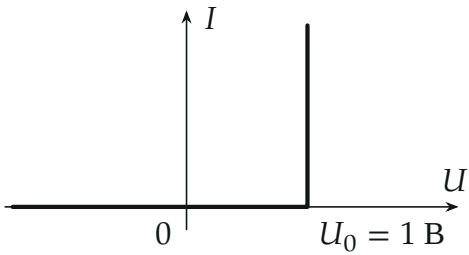
Нелинейная электрическая цепь

Задача 5. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Нелинейная электрическая цепь».

Электрическая цепь (верхний рисунок) состоит из двух одинаковых диодов (D_1 и D_2), трёх одинаковых нелинейных элементов (H_1, H_2 и H_3) и батарейки, поддерживающей постоянное напряжение $U_{AB} = 5{,}0$ В. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на нижнем рисунке: при $U < U_0 = 1$ В ток через диод не идёт, при $U = U_0$ ток может быть любым. Сила тока, протекающего через нелинейный элемент, определяется формулой $I = kU^2$, где U — напряжение на элементе, $k = 0{,}1$ А/В^2 — постоянный коэффициент.





Определите: 1) напряжения U_H на нелинейных элементах; 2) силы токов, протекающих через диоды.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на диоды — перебор состояний. Каждый диод либо закрыт (ток ноль, напряжение меньше U_0), либо открыт (напряжение ровно U_0, ток любой, но в прямом направлении). Предполагаем состояние, находим потенциалы и проверяем, не противоречит ли результат предположению. Удобнее всего считать потенциалы узлов: тогда напряжение на любом элементе — разность потенциалов его концов.

Обозначения. Потенциал точки B примем за нуль, тогда $\varphi_A = 5$ В. φ_C и φ_D — потенциалы узлов C и D. Диод D_1 пропускает ток от A к C, диод D_2 — от D к B. Нелинейные элементы одинаковы: при одинаковом токе на них одинаковое напряжение, $U = \sqrt{I/k}$.

1. Оба диода закрыты. Тока через диоды нет, и H_1, H_2, H_3 соединены последовательно: $A \to H_1 \to D \to H_2 \to C \to H_3 \to B$. Ток через них одинаков, значит, и напряжения одинаковы, по $5/3$ В (рис. 3):

$$\varphi_D = \frac{10}{3}\text{ В}, \qquad \varphi_C = \frac{5}{3}\text{ В}, \qquad U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = \frac{10}{3}\text{ В} > U_0.$$

Закрытый диод D_1 не выдерживает напряжения больше U_0 — противоречие.

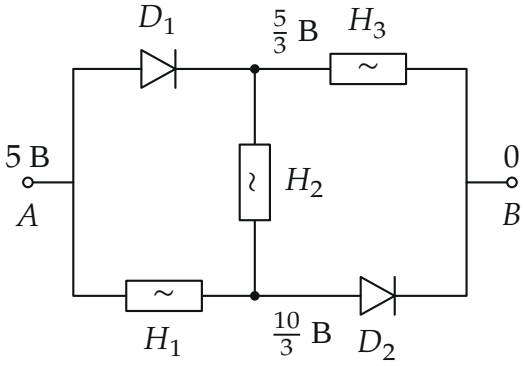


Рис. 3. Предположение «оба диода закрыты»: ток идёт по H_1, H_2, H_3 последовательно. На диоде D_1 получается $\frac{10}{3}$ В $> U_0$ — предположение неверно.

2. Открыт один диод. Пусть D_2 открыт, D_1 закрыт. Тогда $\varphi_D = U_0 =$ 1 В. Ток H_2 из D идёт в C и дальше через H_3 в B (через D_1 тока нет): H_2

и H_3 последовательно, напряжения на них равны, $\varphi_C = 0{,}5$ В. Напряжение на закрытом D_1: $U_{AC} = 4{,}5$ В $> U_0$ — противоречие.

Пусть D_1 открыт, D_2 закрыт. Тогда $\varphi_C = \varphi_A - U_0 = 4$ В, ток из A через H_1, H_2 идёт в C (через D_2 тока нет), напряжения на H_1 и H_2 равны, $\varphi_D = 4{,}5$ В. Напряжение на закрытом D_2: $U_{DB} = 4{,}5$ В $> U_0$ — противоречие.

3. Оба диода открыты. Напряжение на каждом открытом диоде равно U_0:

$$\varphi_C = \varphi_A - U_0 = 4\text{ В}, \qquad \varphi_D = \varphi_B + U_0 = 1\text{ В}.$$

Пункт 1. Напряжения на нелинейных элементах — разности потенциалов их концов (рис. 4):

$$U_{H1} = \varphi_A - \varphi_D = 4\text{ В}, \qquad U_{H3} = \varphi_C - \varphi_B = 4\text{ В},$$

$$U_{H2} = \varphi_C - \varphi_D = 3\text{ В}.$$

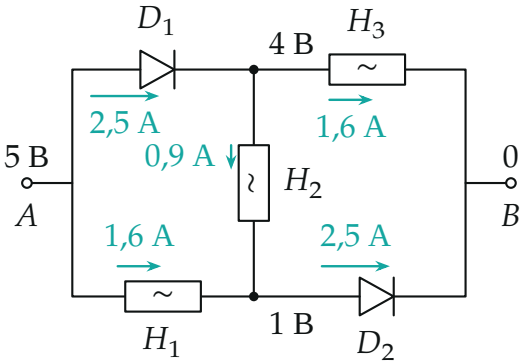


Рис. 4. Оба диода открыты: потенциалы узлов и токи (бирюзой, длины стрелок пропорциональны силам токов).

Пункт 2. Токи через нелинейные элементы — по их характеристике (рис. 5):

$$I_{H1} = I_{H3} = kU_{H1}^2 = 0{,}1\cdot 4^2 = 1{,}6\text{ А}, \qquad I_{H2} = kU_{H2}^2 = 0{,}1\cdot 3^2 = 0{,}9\text{ А}.$$

Ток H_2 идёт от C к D ($\varphi_C > \varphi_D$). Первое правило Кирхгофа для узла C:

всё, что приходит через D_1, уходит через H_3 и H_2; для узла D: через D_2 уходит то, что приходит через H_1 и H_2:

$$I_{D1} = I_{H3} + I_{H2} = 2{,}5\ \text{А}, \qquad I_{D2} = I_{H1} + I_{H2} = 2{,}5\ \text{А}.$$

Оба тока положительны — текут в прямом направлении диодов, и предположение «оба открыты» непротиворечиво.

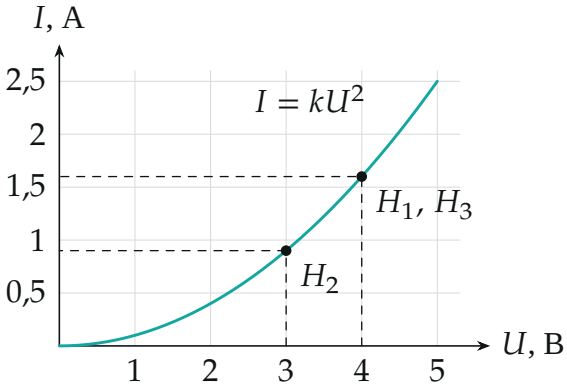


Рис. 5. Характеристика нелинейного элемента $I = kU^2$ и рабочие точки: H_1, H_3 при 4 В, H_2 при 3 В.

Обратите внимание. Проверять надо оба условия открытого диода: напряжение U_0 и ток в прямом направлении. Если бы I_{D1} получился отрицательным, состояние «открыт» было бы невозможно.

Проверка. Ток батарейки: в узел A он делится на $I_{D1} + I_{H1} = 2{,}5 + 1{,}6 = 4{,}1$ А, в узел B сходятся $I_{H3} + I_{D2} = 1{,}6 + 2{,}5 = 4{,}1$ А — сходится. Обход $A \to D_1 \to C \to H_2 \to D \to D_2 \to B$: $1 + 3 + 1 = 5$ В $= U_{AB}$. Смысл: открытые диоды «прибивают» потенциалы узлов C и D, после чего каждый нелинейный элемент считается отдельно.

Ответ. 1) $U_{H1} = U_{H3} = 4$ В, $U_{H2} = 3$ В; 2) $I_{D1} = I_{D2} = 2{,}5$ А.