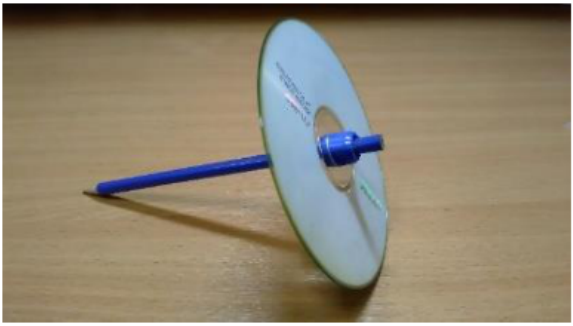
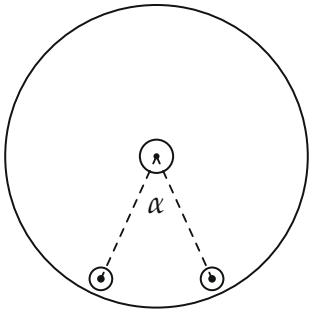
Наклонённый маятник

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 11 класс, задача 2 (практический тур)] «Наклонённый маятник».

В этой задаче изучаются свободные колебания выданного вам маятника на горизонтальной поверхности стола. Свободные колебания маятника являются затухающими. Затухание количественно характеризуется декрементом затухания (от лат. *decrementum* — уменьшение, убыль). Декремент затухания d равен натуральному логарифму отношения двух последовательных максимальных отклонений A колеблющейся величины в одну и ту же сторону: $d = \ln(A_1/A_2)$.



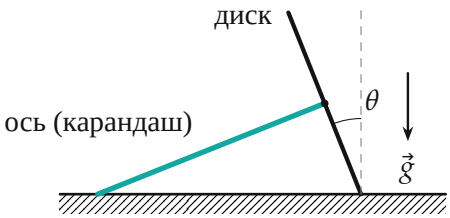
1. Закрепите поочерёдно при помощи магнита у края диска маленькую и большую гайку и, проведя необходимые измерения, выясните, в каком случае декремент затухания колебаний маятника меньше. Опишите ваши измерения и приведите их результаты.
2. Выберите гайку, для которой декремент затухания колебаний маятника меньше. Закрепите при помощи магнитов две такие гайки у края диска, как показано на рисунке. Исследуйте зависимость периода T малых колебаний маятника от угла α между радиусами, проведёнными из центра диска к центрам гаек. Постройте график зависимости $T(\alpha)$. Сделайте вывод о характере зависимости $T(\alpha)$.



Оборудование: маятник с прикреплённым транспортиром, две большие и две маленькие гайки, два магнита, секундомер, 2 листа миллиметровой бумаги формата А5 (для построения графиков).

▲ **Решение. Что происходит.** Маятник — компакт-диск, насаженный на карандаш: острие карандаша и край диска опираются на стол, ось маятника наклонена. Сам по себе диск почти уравновешен относительно своей оси; возвращающий момент создают гайки у края диска — в равновесии они внизу, а при повороте диска поднимаются. Чем дальше центр масс гаек от оси, тем больше возвращающий момент и тем меньше период. Колебания затухают из-за трения в точках опоры и сопротивления воздуха. Главные идеи опыта: декремент удобно сравнивать по числу колебаний, за которое амплитуда уменьшается в одно и то же число раз, а период — измерять по времени многих колебаний.

Обозначения. N — число полных колебаний, за которое угловая амплитуда уменьшается вдвое; r — расстояние от оси до центров гаек; m — масса гайки с магнитом; T — период малых колебаний.



Вид сбоку: ось маятника наклонена, плоскость диска отклонена от вертикали на угол θ; в плоскости диска действует составляющая $g\cos\theta$ ускорения свободного падения

Пункт 1. Декремент. Мерить отдельные амплитуды трудно: за одно колебание амплитуда меняется мало. Поэтому отклоняем диск на $\varphi_0 = 30°$ (по транспортиру) и считаем число полных колебаний N, за которое амплитуда уменьшится до $\varphi_1 = 15°$. Если за каждое колебание амплитуда уменьшается в e^d раз, то за N колебаний — в e^{Nd} раз:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = e^{Nd} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\ln(\varphi_0/\varphi_1)}{N} = \frac{\ln 2}{N}.$$

Опыт повторяем несколько раз для каждой гайки. Результат организаторов: с большой гайкой N примерно вдвое больше, чем с маленькой, значит,

$$d_{\text{больш}} \approx \frac{d_{\text{мал}}}{2}.$$

Декремент меньше с большой гайкой: при большей массе маятник запасает больше энергии, а потери на трение за колебание растут медленнее. Для второго пункта берём две большие гайки.

Пункт 2. Период. Ставим гайки симметрично относительно нижней точки диска под углом α друг к другу (по транспортиру), отклоняем диск на малый угол (около 10°) и секундомером измеряем время t десяти и более колебаний ($t \geq 10$ с, тогда ошибка реакции $\sim 0{,}2$ с даёт не больше 2%), $T = t/N$; каждое измерение повторяем. Угол меняем от 30° до 150° с шагом 15°.

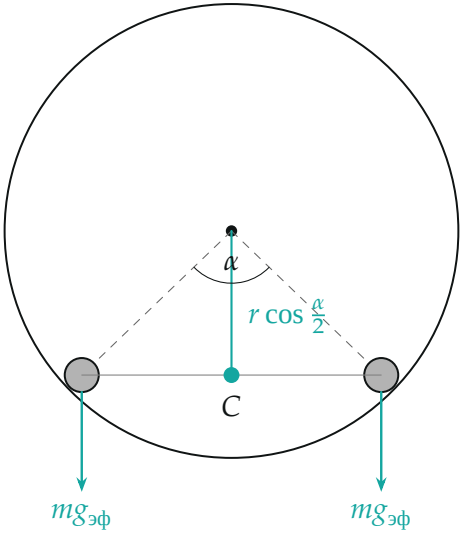
Измерения организаторов (сняты с их графика):

α, °	30	45	60	75	90	105	120	135	150
T, с	0,68	0,68	0,76	0,80	0,89	0,98	1,15	1,31	1,70

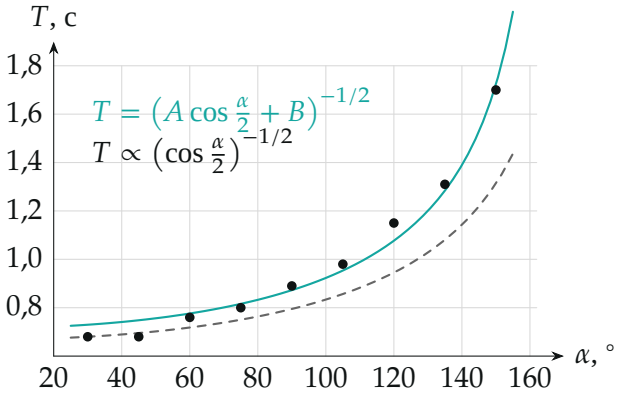
Почему период растёт. Центр масс двух гаек лежит на биссектрисе угла α, на расстоянии $r\cos\frac{\alpha}{2}$ от оси. При повороте диска на малый угол φ возвращающий момент сил тяжести гаек $M = -2mg_{\text{эф}}r\cos\frac{\alpha}{2}\varphi$, где $g_{\text{эф}} = g\cos\theta$, а момент инерции маятника с гайками I от α не зависит (гайки всё время на расстоянии r). Основное уравнение динамики вра-

щения $I\ddot{\varphi} = M$ даёт гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mg_{\text{эф}}r\cos\frac{\alpha}{2}}} \propto \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}}}.$$



Гайки при $\alpha = 92°$: их центр масс C — на биссектрисе, на расстоянии $r\cos\frac{\alpha}{2}$ от оси; чем больше α, тем ближе C к оси и тем слабее возвращающий момент



Зависимость $T(\alpha)$: точки организаторов; пунктир — модель «только гайки», проведённая через точку 30°; бирюзой — та же модель с поправкой на собственный момент маятника (подбор на python)

Сравнение с опытом. Простая модель верно передаёт характер зависимости, но с ростом α опытный период растёт быстрее (при 150° модель даёт 1,31 с вместо 1,70 с). Значит, у самого маятника есть небольшой момент сил тяжести, мешающий возвращению (диск с карандашом и транспортиром уравновешен не идеально). Его учитывает постоянный член: $\frac{1}{T^2} = A\cos\frac{\alpha}{2} + B$. Подбор методом наименьших квадратов по T даёт $A \approx 2{,}2\ \text{с}^{-2}$, $B \approx -0{,}23\ \text{с}^{-2}$; отклонения точек от кривой не больше 0,07 с — на уровне разброса точек при 30° и 45°, где период одинаков.

Вывод. Период монотонно растёт с ростом α, и скорость роста $\frac{\Delta T}{\Delta\alpha}$ тоже растёт: от ≈ 0 при 30–45° до $\approx 0{,}026$ с/градус при 135–150°. При $\alpha \to 180°$ гайки встают на горизонтальный диаметр, их центр масс — на оси, возвращающий момент исчезает и период неограниченно растёт.

Обратите внимание: период надо мерить при малых амплитудах и с большой гайкой — при большом затухании за десять колебаний амплитуда заметно упадёт, и отсчитывать колебания станет трудно. И гайки ставить строго симметрично относительно нижней точки: иначе положение равновесия сдвинется, хотя расстояние $r\cos\frac{\alpha}{2}$ останется прежним.

Проверка. Отношение периодов при 150° и 90°: опыт $1{,}70/0{,}89 = 1{,}9$; модель с поправкой $1{,}72/0{,}87 = 2{,}0$; без поправки

$$\sqrt{\cos 45°\,/\,\cos 75°} = 1{,}65.$$

Поправка нужна, а её знак ($B < 0$) согласуется с тем, что опытный период растёт быстрее.

Ответ. 1) Декремент меньше с большой гайкой: число колебаний, за которое амплитуда падает с 30° до 15°, у неё примерно вдвое больше, $d = \frac{\ln 2}{N}$; 2) T монотонно растёт с α от $\approx 0{,}68$ с при 30° до $\approx 1{,}7$ с при 150°, и всё быстрее; теория: $T \propto \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/2}$, с учётом собственного момента маятника $T^{-2} = A\cos\frac{\alpha}{2} + B$.