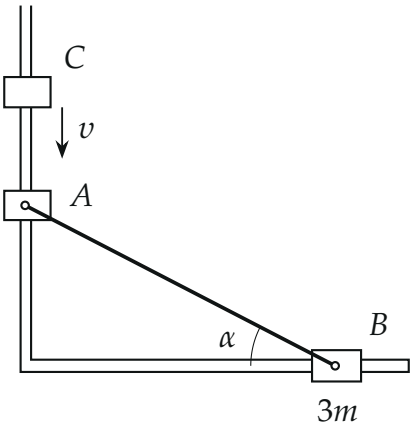
Три муфты

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Три муфты».

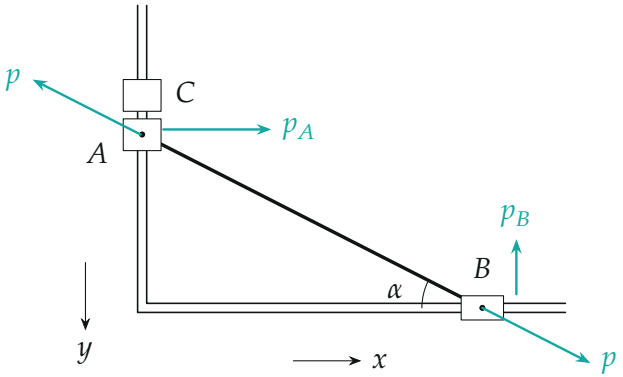
Три муфты (A, B и C) массы которых равны $2m$, $3m$ и m соответственно, могут скользить без трения по двум горизонтальным направляющим, пересекающимся под прямым углом. Муфты A и B с помощью шарниров соединены с лёгким, жёстким, неупругим стержнем так, что угол между стержнем и направляющей, на которой надета муфта B, равен α. Между муфтой C, движущейся со скоростью v, и покоящейся муфтой A происходит неупругое столкновение. Определите скорости муфт сразу после соударения.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на удар в системе со связью. Удар короткий: за время удара муфты не успевают сместиться, а силы, действующие во время удара (сила между C и A, сила стержня, реакции направляющих), огромны — сила тяжести и всё «конечное» на импульс не влияют. Муфта C толкает A вниз, A через стержень толкает B вдоль её направляющей. Главная идея — импульс, переданный лёгким стержнем, направлен вдоль стержня, а реакции направляющих (трения нет) перпендикулярны им. Поэтому для каждой муфты достаточно закона изменения импульса в проекции на её направляющую, и ещё нужна кинематическая связь: стержень нерастяжим.

Обозначения. Ось y — вдоль направляющей A вниз (по скорости C), ось x — вдоль направляющей B от точки пересечения. Удар неупругий, поэтому после него C и A движутся вместе со скоростью v_{AC} вдоль y; v_B — скорость B вдоль x; $p = \int F\,dt$ — импульс силы, переданный стержнем за время удара.

1. Импульсы при ударе. Стержень лёгкий, поэтому сумма сил на него равна нулю и он передаёт силу только вдоль себя (шарниры моментов не передают). При ударе стержень сжимается: на A он действует вдоль себя вверх-влево с импульсом p, на B — вниз-вправо с тем же p. Направляющие отвечают перпендикулярными им импульсами p_A (на A, вдоль x) и p_B (на B, вдоль y).



Импульсы сил за время удара: стержня (вдоль него) и направляющих (поперёк них); длины — в масштабе, $p_A = p\cos\alpha$, $p_B = p\sin\alpha$

2. Закон изменения импульса для системы $A + C$ в проекции на y. До удара импульс системы mv (A покоится), после — $(2m + m)v_{AC}$. Сила взаимодействия A и C внутренняя и выпадает — поэтому берём их вместе; p_A на ось y не проецируется; проекция импульса стержня $-p\sin\alpha$:

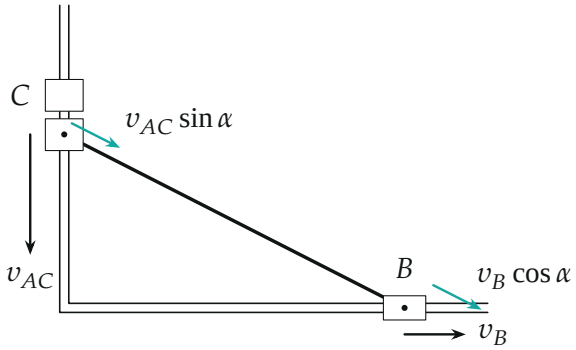
$$3mv_{AC} = mv - p\sin\alpha.$$

3. Закон изменения импульса для муфты B в проекции на x (p_B на неё не проецируется):

$$3mv_B = p\cos\alpha.$$

4. Кинематическая связь. Стержень жёсткий: проекции скоростей его концов на направление стержня равны, иначе он сжимался бы или растягивался. Скорость A направлена по y и составляет со стержнем угол $90° - \alpha$, скорость B — по x, угол α:

$$v_{AC}\sin\alpha = v_B\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_B = v_{AC}\operatorname{tg}\alpha.$$



Скорости сразу после удара (в масштабе ответа при $\alpha = 27°$) и их проекции на стержень — бирюзой; они равны

5. Решаем систему. Из пунктов 3 и 4: $p = \dfrac{3mv_B}{\cos\alpha} = \dfrac{3mv_{AC}\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$. Подставим в пункт 2:

$$3mv_{AC} = mv - 3mv_{AC}\operatorname{tg}^2\alpha \quad \Rightarrow \quad 3v_{AC}(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = v,$$

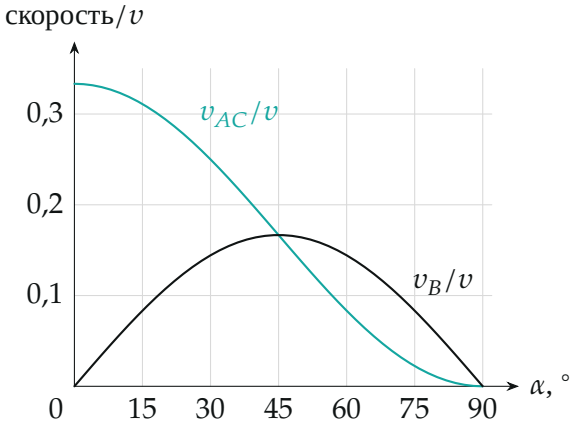
$$v_{AC} = \frac{v\cos^2\alpha}{3}, \qquad v_B = v_{AC}\operatorname{tg}\alpha = \frac{v\sin\alpha\cos\alpha}{3} = \frac{v\sin 2\alpha}{6}.$$

Обе скорости положительны: A и C движутся вниз (по скорости C), B отъезжает от точки пересечения направляющих.

Второй способ — эффективная масса. Муфты A и B со стержнем — система с одной степенью свободы: если A движется со скоростью u, то B — со скоростью $u\operatorname{tg}\alpha$. Её кинетическая энергия $\frac{2mu^2}{2} + \frac{3mu^2\operatorname{tg}^2\alpha}{2} = \frac{Mu^2}{2}$, где $M = 2m + 3m\operatorname{tg}^2\alpha$ — масса, которую «чувствует» муфта C, толкая A вдоль направляющей. Реакции направляющих работы не со-

вершают, поэтому удар C по этой системе — как неупругий удар по телу массы M: $mv = (m+M)u$, $u = \dfrac{v}{3+3\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{v\cos^2\alpha}{3}$. Совпало.

Обратите внимание: импульс системы трёх муфт не сохраняется — направляющие дают импульсы p_A и p_B того же порядка, что и удар. Сохранение импульса можно писать только в проекции на направляющую каждой муфты и только с учётом импульса стержня. Энергия тоже не сохраняется: удар неупругий.



Скорости после удара в зависимости от угла α

Проверка. Размерность — скорость. Пределы: $\alpha \to 0$ — стержень лежит вдоль направляющей B и перпендикулярен A, муфта B не мешает: $v_{AC} = v/3$ — обычный неупругий удар m о $2m$, $v_B = 0$. $\alpha \to 90°$ — стержень вдоль направляющей A упирается в B, которой некуда двигаться: $v_{AC} \to 0$, $v_B \to 0$. Скорость B максимальна при $\alpha = 45°$: $v/6$.

Ответ. Муфты A и C движутся вместе со скоростью $v_{AC} = \dfrac{v\cos^2\alpha}{3}$ (в сторону движения C); муфта B — со скоростью $v_B = \dfrac{v\sin 2\alpha}{6}$ (от точки пересечения направляющих).