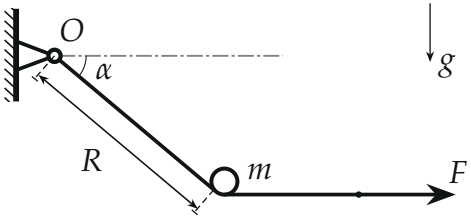
Отрыв цилиндра

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Отрыв цилиндра».

Тонкая лёгкая нерастяжимая лента прикреплена к стене в точке O (см. рис.). На ленте удерживают небольшой цилиндр массой m так, что наклонный участок ленты длины R образует угол α с горизонталью. К свободному концу ленты приложили силу F и цилиндр отпустили. Найдите его скорость в момент отрыва от ленты. Сила F всё время направлена горизонтально и постоянна по величине. Считайте, что трения нет, ускорение свободного падения равно g.



▲ **Решение. Что происходит.** Лента огибает цилиндр снизу и тянет его вверх: её наклонный участок — к точке O, горизонтальный — к свободному концу. Свободный конец уходит вправо, наклонный участок «выпрямляется», цилиндр поднимается и разгоняется. Главных идей две. Первая — найти момент отрыва: лента лёгкая и гладкая, поэтому сила натяжения во всех её точках одна и та же, $T = F$, и давит лента на цилиндр, только пока изогнута на нём. Вторая — скорость найти по энергии: работу совершает только сила F и сила тяжести, а работу силы F легко посчитать через смещение конца ленты.

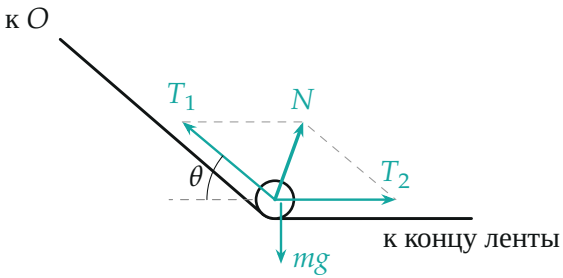
Обозначения. $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ — силы, с которыми наклонный и горизонтальный участки ленты действуют на цилиндр, $T_1 = T_2 = F$; $\vec{N} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ — суммарная сила давления ленты на цилиндр; x — смещение свободного конца ленты за время до отрыва.

1. Натяжение ленты. Возьмём малый кусок ленты. Он лёгкий, поэтому по второму закону Ньютона сумма сил на него равна нулю при любом ускорении. Трения нет, сила со стороны цилиндра перпендикулярна ленте, поэтому вдоль ленты натяжение не меняется: $T = F$ по всей длине, и на прямых участках, и на огибающем цилиндр.

2. Сила давления ленты и момент отрыва. Огибающий участок ленты лёгкий, сумма сил на него ноль: сила давления цилиндра на ленту равна $-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$, а по третьему закону Ньютона лента давит на цилиндр с силой

$$\vec{N} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2, \qquad N = 2F\sin\frac{\theta}{2},$$

где θ — угол наклонного участка с горизонталью в данный момент (угол между $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равен $180^\circ - \theta$). $\vec{N}$ направлена по биссектрисе угла ленты, вверх-вправо.



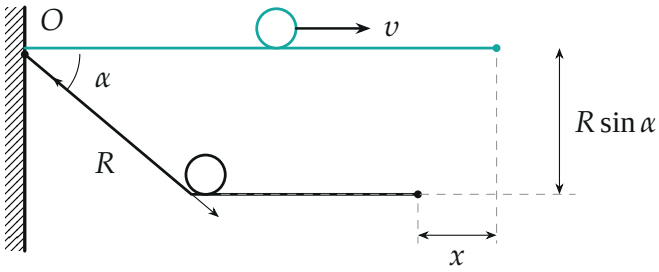
Силы на цилиндр в начальный момент при $F = 2mg$, $\theta = \alpha = 40^\circ$ (в масштабе): натяжения ленты складываются в силу давления N по биссектрисе

Цилиндр отрывается, когда $N = 0$, то есть $\theta = 0$: лента выпрямилась и стала горизонтальной целиком. Пока $\theta \neq 0$, натянутая изогнутая лента прижата к цилиндру. Значит, в момент отрыва цилиндр находится на уровне точки O.

3. Смещение конца ленты. Длина ленты L постоянна. В начале по горизонтали она занимает $R\cos\alpha$ (наклонный участок) плюс $L - R$ (горизонтальный), конец ленты — на расстоянии $R\cos\alpha + L - R$ от стены. В момент отрыва вся лента горизонтальна, конец — на расстоянии L. Смещение конца

$$x = L - (R\cos\alpha + L - R) = R(1 - \cos\alpha).$$

Обратите внимание: где именно цилиндр окажется на горизонтальной ленте, знать не нужно — смещение конца от этого не зависит.



Начало (чёрным) и момент отрыва (бирюзой): лента горизонтальна, её конец сместился на $x = R(1 - \cos\alpha)$, цилиндр поднялся на $R\sin\alpha$

4. Теорема об изменении механической энергии цилиндра. Лента лёгкая, работа сил на неё равна нулю: работа, которую лента совершает над цилиндром, равна работе силы F над концом ленты, $A = Fx$ (стена в точке O работы не совершает — O неподвижна). От отпускания до отрыва цилиндр поднялся на $R\sin\alpha$ и приобрёл скорость v:

$$FR(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2} + mgR\sin\alpha.$$

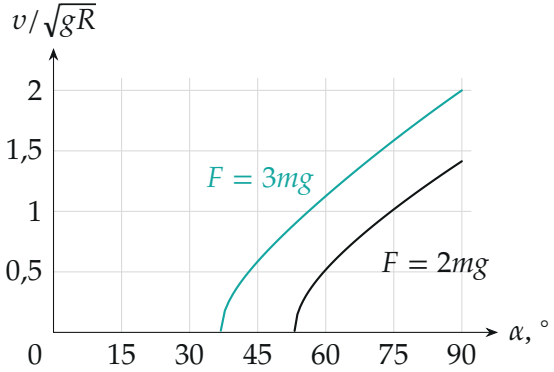
Отсюда

$$v = \sqrt{2R\Big[\frac{F(1 - \cos\alpha)}{m} - g\sin\alpha\Big]}.$$

5. Когда ответ имеет смысл. Подкоренное выражение должно быть положительным: $F(1 - \cos\alpha) > mg\sin\alpha$, или, с $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > \frac{mg}{F}.$$

Иначе работы силы F не хватает, чтобы поднять цилиндр на уровень O: он не дойдёт до горизонтального положения ленты и отрыва не будет.



Скорость отрыва в зависимости от α; кривые начинаются там, где $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{mg}{F}$ ($53°$ и $37°$)

Проверка. Размерность: $\frac{F}{m}R$ и gR — квадрат скорости. Предел $g \to 0$: $v^2 = \frac{2FR(1-\cos\alpha)}{m}$ — вся работа F ушла в кинетическую энергию. При $\alpha = 90°$ (цилиндр висит под O на глубине R, конец ленты сдвигается на R): $\frac{mv^2}{2} = FR - mgR$ — как подъём груза на высоту R силой F через лёгкий блок.

Ответ. $v = \sqrt{2R\left[\frac{F(1-\cos\alpha)}{m} - g\sin\alpha\right]}$; отрыв происходит, когда лента становится горизонтальной, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > \frac{mg}{F}$.