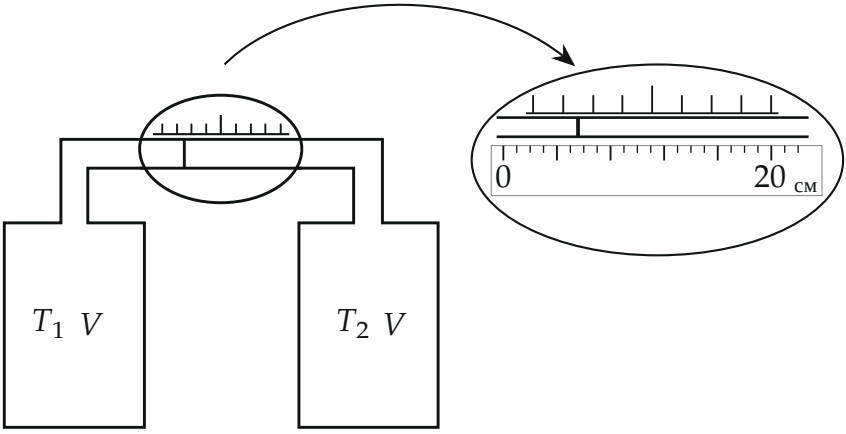
Дифференциальный термометр

Задача 3. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Дифференциальный термометр».

Два одинаковых сосуда с объёмами $V = 1{,}0$ л каждый соединены трубкой длиной $L = 300$ см и поперечным сечением $S = 1$ см^2 с небольшим поршнем внутри, который может скользить в ней без трения (см. рис.). Когда температуры газов в сосудах равны $T_0 = 300$ К, поршень располагается посередине трубки. При незначительных изменениях температур в сосудах поршень смещается вдоль шкалы, нанесённой рядом. Перерисовав в тетрадь, проградуируйте эту шкалу (оцифруйте её деления в градусах Кельвина), чтобы по ней можно было считывать разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$ (с учётом знака!). Будет ли эта шкала линейной? На выносном рисунке рядом со шкалой помещена линейка.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на газы, разделённые поршнем. Поршень лёгкий и скользит без трения, поэтому давления по обе стороны от него равны в любой момент. Количество газа в каждой половине своё и не меняется. Нагреется газ в одном сосуде сильнее — он расширится за счёт другого, и поршень уйдёт к более холодному сосуду. Главная идея: записать уравнение Менделеева–Клапейрона для каж-

дой половины, давление выпадет делением, и останется связь смещения поршня с температурами.

Обозначения. $V_0 = V + \dfrac{LS}{2}$ — объём газа с каждой стороны при равных температурах (сосуд плюс половина трубки), x — смещение поршня от середины трубки в сторону сосуда 2, p — давление газа после смещения, ν — количество газа в каждой половине.

1. Количество газа одинаково. В начале $T_1 = T_2 = T_0$, поршень посередине, объёмы равны V_0, давления равны. Уравнение Менделеева–Клапейрона $p_0 V_0 = \nu R T_0$ для каждой половины — значит, ν одинаково и дальше не меняется (поршень газ не пропускает).

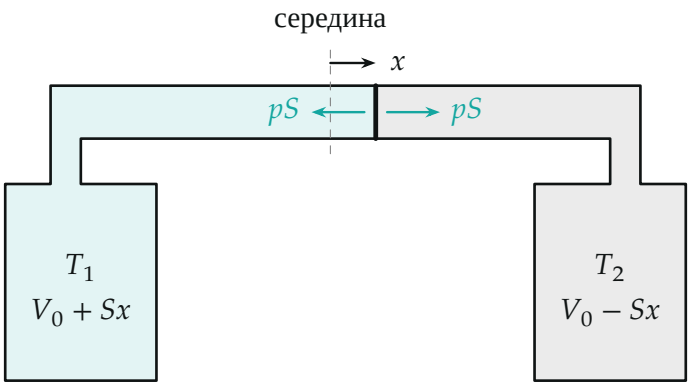
2. Уравнения состояния после изменения температур. Поршень сместился на x к сосуду 2: объём газа 1 стал $V_0 + Sx$, газа 2 — $V_0 - Sx$. Давление общее (поршень в равновесии, трения нет):

$$\frac{p\,(V_0 + Sx)}{T_1} = \nu R = \frac{p\,(V_0 - Sx)}{T_2}.$$

Сократим p и νR — ради этого и делили:

$$(V_0 + Sx)\,T_2 = (V_0 - Sx)\,T_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{V_0}{S} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}.$$

Знак: при $T_1 > T_2$ получаем $x > 0$ — поршень уходит к более холодному сосуду 2, как и ожидали.

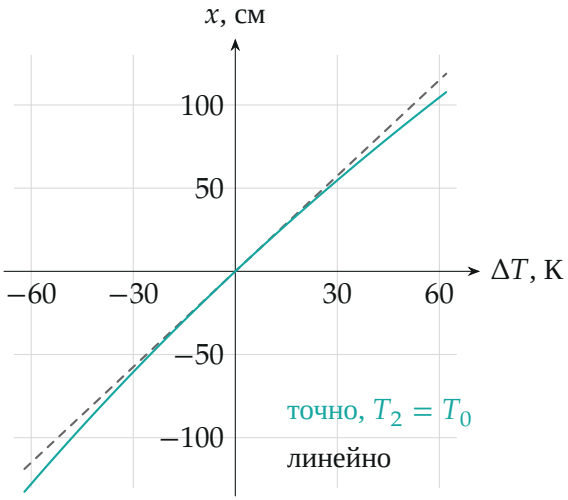


Поршень сместился к холодному сосуду 2 на x; силы давления на поршень pS с двух сторон равны (здесь $T_1 > T_2$)

3. Линейна ли шкала. Смещение пропорционально $T_1 - T_2$, но делится на $T_1 + T_2$. При незначительных изменениях температур $T_1 + T_2 \approx 2T_0$, и

$$x \approx \frac{V_0}{2ST_0}\,\Delta T.$$

Шкала *приближённо* линейна — пока $|T_1 - T_0|$ и $|T_2 - T_0|$ малы по сравнению с T_0. Строго линейной она не будет: при той же разности ΔT показания зависят ещё и от суммы $T_1 + T_2$ (например, при нагреве одного сосуда на ΔT с другим при T_0 поршень сдвинется на $\frac{V_0}{S} \cdot \frac{\Delta T}{2T_0 + \Delta T}$ — меньше линейного при $\Delta T > 0$ и больше при $\Delta T < 0$).



Смещение поршня при нагреве (охлаждении) первого сосуда, второй — при T_0: точная формула (бирюзой) и линейное приближение (пунктир). В пределах шкалы ($|\Delta T| < 5$ K) они неразличимы

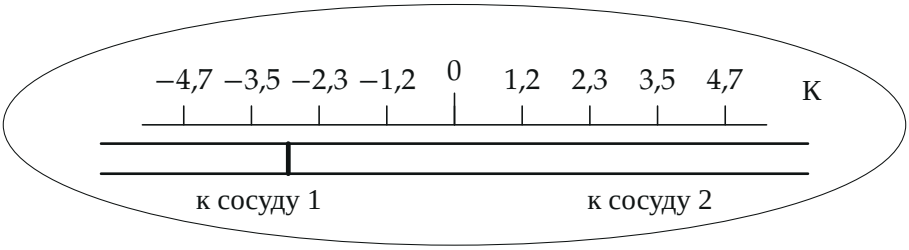
4. Градуировка. Числа: $V_0 = 1000 + \dfrac{300 \cdot 1}{2} = 1150$ см^3,

$$\frac{x}{\Delta T} = \frac{V_0}{2ST_0} = \frac{1150}{2 \cdot 1 \cdot 300}\,\frac{\text{см}}{\text{K}} = 1{,}92\,\frac{\text{см}}{\text{K}}.$$

По линейке на выносном рисунке: четыре деления шкалы занимают 9 см, одно деление $\Delta L_1 \approx 2{,}25$ см. Цена деления

$$\Delta T_{\text{дел}} = \frac{2ST_0\,\Delta L_1}{V_0} = \frac{2{,}25}{1{,}92}\ \text{К} \approx 1{,}2\ \text{К}.$$

Ноль — в середине (центральный длинный штрих). Сдвиг к сосуду 2 (вправо) означает $T_1 > T_2$, поэтому справа от нуля — положительные ΔT. Поршень на рисунке условия стоит на 5,5 см левее нуля: $\Delta T \approx -2{,}9$ К, второй сосуд теплее первого.



Проградуированная шкала разности $\Delta T = T_1 - T_2$ (цена деления $\approx 1{,}2$ К); поршень показывает $\approx -2{,}9$ К

Обратите внимание: в объём газа входит и половина трубки, $LS/2 = 150$ см^3 — это 15% объёма сосуда, без неё цена деления вышла бы на 15% меньше. Поршень сдвигается к *холодному* сосуду; у организаторов в тексте сказано, что при нагреве левого сосуда поршень сдвинется влево, но их же уравнения (объём левого газа $V_0 + \Delta L\,S$) означают сдвиг вправо — это описка, на цену деления она не влияет.

Проверка. Размерность: $\frac{V_0}{ST_0}\Delta T$ — длина. Второй способ — через малые изменения: из $pV = \nu RT$ для каждого газа $\frac{\delta V_1}{V_0} = \frac{\delta T_1}{T_0} - \frac{\delta p}{p}$, $\frac{\delta V_2}{V_0} = \frac{\delta T_2}{T_0} - \frac{\delta p}{p}$, а $\delta V_1 = -\delta V_2 = Sx$. Вычтем: $2Sx = \frac{V_0(\delta T_1 - \delta T_2)}{T_0}$ — то же, $x = \frac{V_0\Delta T}{2ST_0}$. Ход поршня по всей трубке (± 150 см) соответствует $|\Delta T| \approx 78$ К, так что шкала в несколько кельвин — малая часть трубки, где линейность выполнена с запасом.

Ответ. $x = \frac{V_0}{S}\cdot\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \approx \frac{V_0\,\Delta T}{2ST_0}$, $V_0 = V + \frac{LS}{2}$: при малых изменениях температур шкала линейна (1,92 см на кельвин), цена деления

$\approx$ 1,2 К, ноль посередине, положительные ΔT — в сторону сосуда 2; строго шкала нелинейна (зависит и от $T_1 + T_2$).