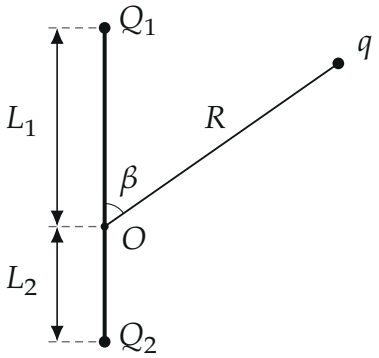
И так можно измерять

Задача 4. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 11 класс, задача 4] «И так можно измерять».

В точке O к стержню привязана непроводящая нить длиной R с зарядом q на конце. Известный эталонный заряд Q_2 и измеряемый заряд Q_1 установлены на расстояниях L_2 и L_1 от точки O. Все заряды одного знака и могут считаться точечными.



1. Найдите величину заряда Q_1, если в состоянии равновесия нить отклонена на угол β от отрезка, соединяющего заряды Q_2 и Q_1.
2. Какой величины заряды Q_1 можно измерить таким способом в случае, если $L_1 = 2L_2$, $R = 3L_2$?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Заряд q отталкивается от обоих зарядов и висит на нити, которая не даёт ему улететь. Это задача на равновесие тела на нити: натяжение нити неизвестно, и его надо исключить. Удобнее всего — правило моментов относительно точки подвеса O: момент силы натяжения относительно O равен нулю, потому что нить проходит через O. Останется равенство моментов двух кулоновских сил, а их плечи легко выразить через площади треугольников. Силу тяжести, как и организаторы, не учитываем (её в условии нет: прибор можно положить в горизонтальную плоскость).

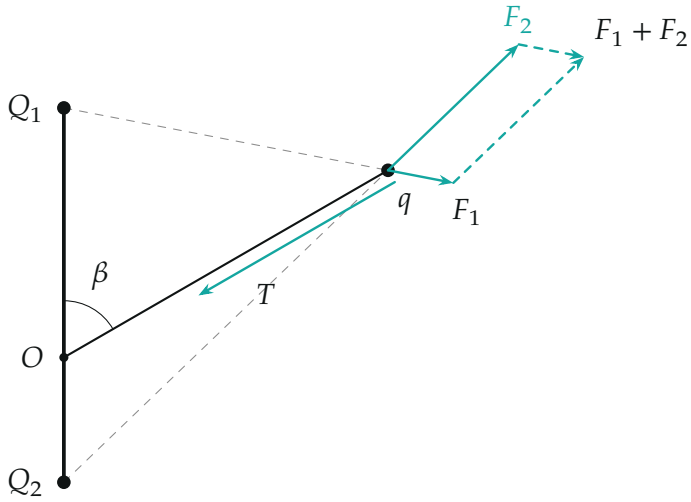
Обозначения. R_1, R_2 — расстояния от q до Q_1 и Q_2; $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ — кулоновские силы, действующие на q; $\vec{T}$ — сила натяжения нити; d_1, d_2 — плечи сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно O; $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Пункт 1.

1. Силы. По закону Кулона заряды одного знака отталкиваются: $\vec{F}_1$ направлена от Q_1 к q, $\vec{F}_2$ — от Q_2 к q,

$$F_1 = \frac{kQ_1q}{R_1^2}, \qquad F_2 = \frac{kQ_2q}{R_2^2}.$$

Условие равновесия: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{T} = 0$, то есть сумма кулоновских сил направлена точно вдоль нити, от O.



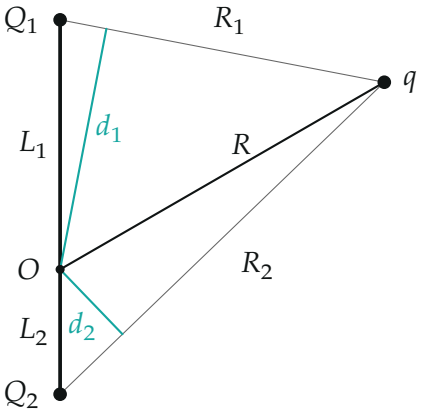
Силы на заряд q при $L_1 = 2L_2$, $R = 3L_2$, $\beta = 60°$, в масштабе: сумма кулоновских сил идёт вдоль нити и уравновешена натяжением

2. Правило моментов относительно O**.** Точку выбираем там, где закреплена нить: момент $\vec{T}$ равен нулю, натяжение не понадобится. Плечо силы — расстояние от O до прямой, вдоль которой она действует. Сила $\vec{F}_1$ действует вдоль прямой Q_1q; удвоенная площадь треугольника OQ_1q равна и $L_1R\sin\beta$ (две стороны и угол между ними), и R_1d_1 (основание R_1 на высоту d_1). Так же для треугольника OQ_2q, где угол при O равен $180° - \beta$:

$$d_1 = \frac{L_1R\sin\beta}{R_1}, \qquad d_2 = \frac{L_2R\sin\beta}{R_2}.$$

Моменты $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ поворачивают нить в разные стороны ($\vec{F}_1$ — к Q_2, $\vec{F}_2$ — к Q_1), в равновесии они равны:

$$\frac{kQ_1q}{R_1^2}\cdot\frac{L_1R\sin\beta}{R_1}=\frac{kQ_2q}{R_2^2}\cdot\frac{L_2R\sin\beta}{R_2}\quad\Rightarrow\quad\frac{Q_1L_1}{R_1^3}=\frac{Q_2L_2}{R_2^3}.$$



Плечи сил относительно O — перпендикуляры d_1 и d_2 на прямые Q_1q и Q_2q

3. Расстояния. Теорема косинусов в треугольниках OQ_1q (угол при O равен β) и OQ_2q (угол $180^\circ-\beta$, $\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta$):

$$R_1^2=R^2+L_1^2-2RL_1\cos\beta,\qquad R_2^2=R^2+L_2^2+2RL_2\cos\beta.$$

Соберём ответ:

$$Q_1=Q_2\frac{L_2}{L_1}\Big(\frac{R_1}{R_2}\Big)^3=Q_2\frac{L_2}{L_1}\left(\frac{R^2+L_1^2-2RL_1\cos\beta}{R^2+L_2^2+2RL_2\cos\beta}\right)^{3/2}.$$

Второй способ (как у организаторов) — проекции на перпендикуляр к нити: $F_1\sin\alpha_1=F_2\sin\alpha_2$, где $\alpha_{1,2}$ — углы сил с нитью; теорема синусов даёт $R_1\sin\alpha_1=L_1\sin\beta$, $R_2\sin\alpha_2=L_2\sin\beta$, и получается то же $\frac{Q_1L_1}{R_1^3}=\frac{Q_2L_2}{R_2^3}$. Численно на рисунке сил ($\beta=60^\circ$): $Q_1=0{,}198\,Q_2$, и сумма $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ действительно направлена вдоль нити (python).

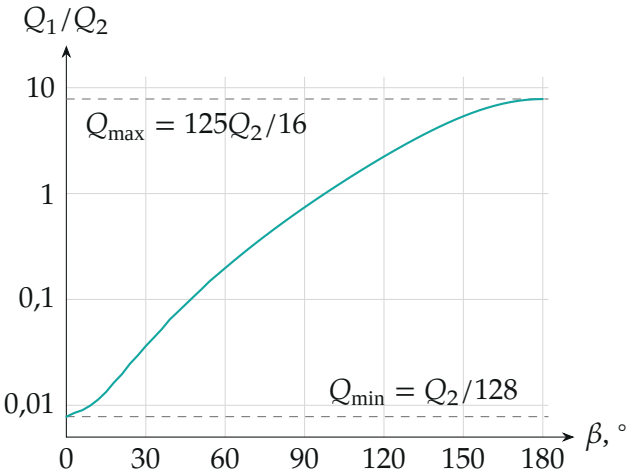
Пункт 2. При $L_1 = 2L_2$, $R = 3L_2$:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{13 - 12\cos\beta}{10 + 6\cos\beta}\right)^{3/2}.$$

С ростом β числитель растёт, знаменатель падает — Q_1 монотонно растёт, каждому Q_1 отвечает одно β. Крайние значения — на концах, когда нить ложится на прямую зарядов:

$\beta \to 0$ (нить к Q_1): $R_1 = R - L_1 = L_2$, $R_2 = R + L_2 = 4L_2$, $Q_{\min} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^3}Q_2 = \frac{Q_2}{128}$;

$\beta \to 180°$ (нить к Q_2): $R_1 = R + L_1 = 5L_2$, $R_2 = R - L_2 = 2L_2$, $Q_{\max} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 Q_2 = \frac{125}{16}Q_2 \approx 7{,}8\,Q_2$.



Измеряемый заряд в зависимости от угла отклонения нити (логарифмическая шкала), $L_1 = 2L_2$, $R = 3L_2$

Обратите внимание: на концах интервала, при $\beta = 0$ и $\beta = 180°$, нить лежит на прямой зарядов, и там равновесие возможно при любом Q_1 — но такое положение ничего не измеряет. Внутри интервала равновесие устойчиво: энергия $W(\beta) = kq\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$ имеет производную $\frac{dW}{d\beta} = kqR\sin\beta\left(\frac{Q_2L_2}{R_2^3} - \frac{Q_1L_1}{R_1^3}\right)$, а скобка с ростом β растёт и меняет знак

с минуса на плюс — это минимум энергии. Поэтому измеримы заряды строго между $Q_{\min}$ и $Q_{\max}$.

Проверка. Размерность: отношение длин в степени — безразмерно, $Q_1 \sim Q_2$. Симметрия: при $L_1 = L_2$ и $\beta = 90°$ ($R_1 = R_2$) получаем $Q_1 = Q_2$ — одинаковые заряды на одинаковых расстояниях держат нить перпендикулярно стержню.

Ответ. 1) $Q_1 = Q_2 \dfrac{L_2}{L_1}\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3$, где $R_1^2 = R^2 + L_1^2 - 2RL_1\cos\beta$, $R_2^2 = R^2 + L_2^2 + 2RL_2\cos\beta$; 2) $\dfrac{Q_2}{128} < Q_1 < \dfrac{125}{16}Q_2$.