Составной конденсатор

Задача 5. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Составной конденсатор».

Электрическая цепь состоит из катушки индуктивностью L, трёх пластин (1, 2, 3) площадью S и ключа. Расстояния между пластинами равны d и $2d$ (рис. 1). Внешние пластины имеют заряды q и $-q$.

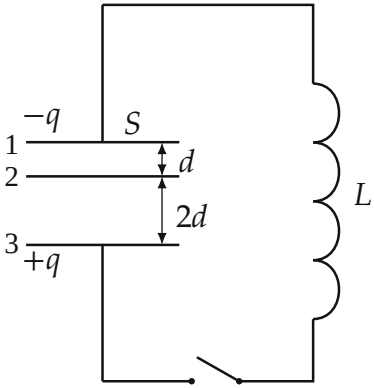


Рис. 1

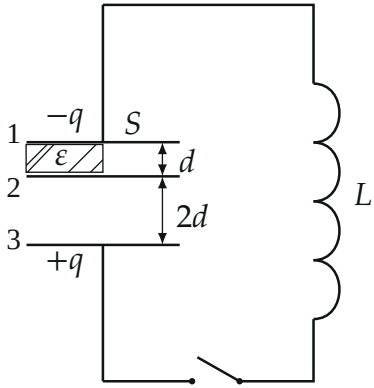


Рис. 2

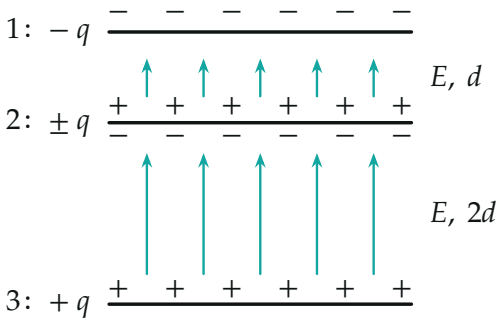
1. Определите максимальную силу тока через катушку после замыкания ключа.
2. Определите максимальную силу тока через катушку после замыкания ключа в случае, если половина пространства между пластинами 1 и 2 заполнена диэлектриком с проницаемостью ε (рис. 2).

▲ **Решение. Что происходит.** После замыкания ключа пластины 1 и 3 разряжаются через катушку — это колебательный контур. Ток растёт, пока на пластинах есть заряд (напряжение на катушке $L\dot{I}$ равно напряжению на конденсаторе), и максимален в момент, когда заряд пластин прошёл через ноль. Сопротивления нет, поэтому вся энергия электрического поля в этот момент перешла в энергию магнитного поля катушки. Главная идея — увидеть в трёх пластинах два последовательных конденсатора: средняя пластина 2 ни к чему не подключена, её суммарный заряд равен нулю, а на её сторонах наводятся заряды $+q$ и $-q$.

Обозначения. C_1 — ёмкость промежутка 1–2, C_2 — промежутка 2–3, C — ёмкость всей системы между пластинами 1 и 3; $I_{\max}$ — максимальный ток.

Пункт 1.

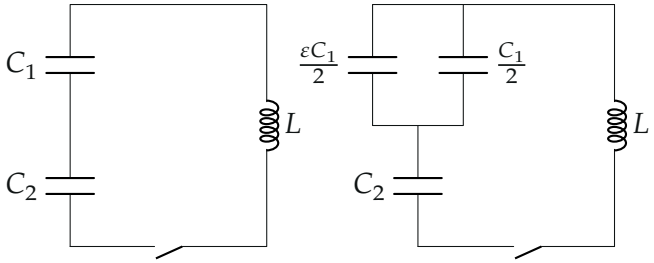
1. Почему конденсаторы последовательны. Пластина 2 изолирована и не заряжена. Поле зарядов $\mp q$ внешних пластин наводит на её сторонах $+q$ (сторона к пластине 1) и $-q$ (сторона к пластине 3). Получились два конденсатора с одинаковым зарядом q — так и ведут себя последовательно соединённые конденсаторы; общая для них проводящая пластина — это «провод» между ними.



Поле в обоих промежутках одинаково, $E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$: на средней пластине наведены заряды $+q$ и $-q$

Ёмкости плоских конденсаторов и ёмкость последовательного соединения (обратные ёмкости складываются, потому что напряжения складываются при одном заряде):

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}, \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{3d}{\varepsilon_0 S}.$$



Эквивалентные схемы: пункт 1 (слева) и пункт 2 — промежуток 1–2 с диэлектриком в половине площади это два параллельных конденсатора (справа)

2. Закон сохранения энергии в контуре от замыкания ключа до максимума тока. В момент максимума $\dot{I} = 0$, напряжение на катушке $L\dot{I}$ равно нулю, значит, и напряжение на конденсаторах, и их заряд равны нулю: вся энергия поля — в катушке. Сопротивления нет, тепло не выделяется:

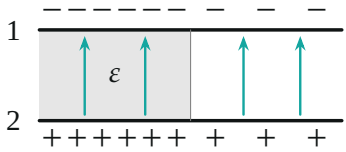
$$\frac{q^2}{2C} = \frac{LI_{\max}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = \frac{q}{\sqrt{LC}} = q\sqrt{\frac{3d}{\varepsilon_0 SL}}.$$

Пункт 2.

3. Ёмкость промежутка с диэлектриком. Диэлектрик заполняет промежуток 1–2 по всей толщине d, но на половине площади. Пластины 1 и 2 — проводники, напряжение между ними одно и то же над обеими половинами; значит, это два конденсатора площадью $\frac{S}{2}$, соединённых *параллельно* (при параллельном соединении ёмкости складываются):

$$C_1' = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} + \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{(1+\varepsilon)\,\varepsilon_0 S}{2d}.$$

Над диэлектриком поле то же, $E = U_{12}/d$, но заряд пластины там в ε раз плотнее: из заряда q на диэлектрическую половину приходится $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}q$.

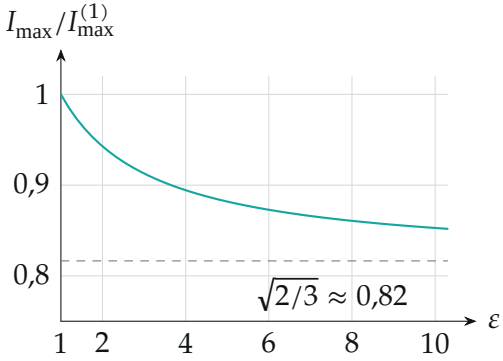


Промежуток 1–2 в пункте 2: поле E одинаково в обеих половинах, а заряды пластин над диэлектриком в ε раз плотнее (здесь $\varepsilon = 2$)

4. Тот же закон сохранения энергии. Промежуток 2–3 не изменился, $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$:

$$\frac{1}{C'} = \frac{2d}{(1+\varepsilon)\varepsilon_0 S} + \frac{2d}{\varepsilon_0 S} = \frac{2d}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$I_{\max} = \frac{q}{\sqrt{LC'}} = q\sqrt{\frac{2d}{\varepsilon_0 SL} \cdot \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$



Максимальный ток пункта 2 в долях ответа пункта 1

Обратите внимание: диэлектрик здесь стоит *рядом* с пустой частью (параллельно), а не слоем поперёк поля — поэтому ёмкости половин складываются, а не их обратные величины. При $\varepsilon \to \infty$ ёмкость промежутка 1–2 бесконечна, остаётся только промежуток 2–3: ток стремится к $q\sqrt{\frac{2d}{\varepsilon_0 SL}}$, то есть к $\sqrt{2/3}$ от тока пункта 1.

Проверка. Размерность: $\frac{\varepsilon_0 S}{d}$ — фарад, $\frac{q}{\sqrt{LC}}$ — кулон на секунду, ампер. При $\varepsilon = 1$ ответ пункта 2 даёт $\frac{2d \cdot 3}{2} = 3d$ под корнем — ответ пункта 1. Знак: диэлектрик увеличивает ёмкость, при том же заряде энергия поля $\frac{q^2}{2C}$ меньше — и максимальный ток меньше, как и вышло.

Ответ. 1) $I_{\max} = q\sqrt{\frac{3d}{\varepsilon_0 SL}}$; 2) $I_{\max} = q\sqrt{\frac{2d}{\varepsilon_0 SL} \cdot \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}}$.