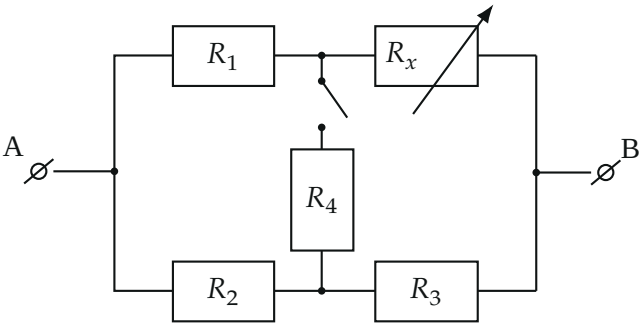
Электрический «серый ящик»

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 9 класс, задача 2 (практический тур)] «Электрический „серый ящик“».

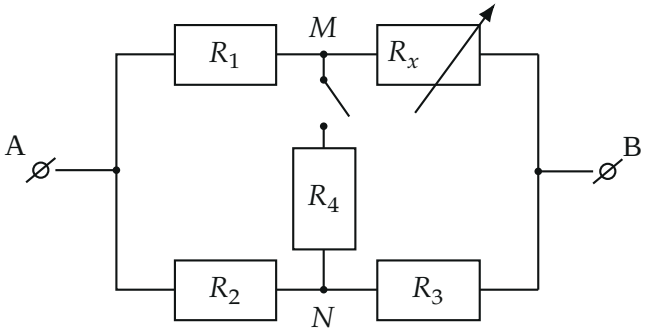
Внутри «серого ящика» находятся 5 резисторов, один из которых переменный (см. рисунок). Сопротивления двух резисторов известны и равны $R_1 = 1{,}0$ кОм и $R_2 = 2{,}0$ кОм. Определите сопротивления резисторов R_3, R_4 и найдите, в каком диапазоне изменяется сопротивление переменного резистора R_x.



Оборудование: мультиметр, «серый ящик» с выведенным наружу ключом и регулировочной ручкой переменного резистора.

▲ **Решение. Что происходит.** Это мост Уитстона с ключом в диагонали. Омметр меряет сопротивление между выводами A и B; доступны только ручка R_x и ключ. Главная идея: если мост сбалансирован (потенциалы точек M и N равны), ток через диагональ не идёт, и замыкание ключа не меняет показание омметра — это и есть признак баланса. Баланс даёт пропорцию, из неё R_3; крайние положения ручки дают диапазон R_x; замкнутый ключ при $R_x = 0$ даёт R_4.

Обозначения. M — узел между R_1 и R_x, N — между R_2 и R_3; Ω — показание омметра (сопротивление между A и B); $\alpha = R_x/R_1$ при балансе.



Ключ разомкнут: две параллельные ветви R_1+R_x и R_2+R_3; R_4 не участвует

1. Баланс моста. Вращая ручку, ищем положение, при котором показание омметра не меняется при замыкании ключа: $\Omega_1 = 1{,}60 \pm 0{,}05$ кОм. При балансе $\varphi_M = \varphi_N$. По закону Ома для двух ветвей (ключ разомкнут, через каждую ветвь свой ток) доли напряжения на R_1 и на R_2 равны:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_x} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{R_x}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = \alpha.$$

2. Сопротивление R_3. Ветви соединены параллельно, $R_1 + R_x = (1+\alpha)R_1$, $R_2 + R_3 = (1+\alpha)R_2$:

$$\Omega_1 = \frac{(1+\alpha)R_1 \cdot (1+\alpha)R_2}{(1+\alpha)(R_1+R_2)} = (1+\alpha)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Отсюда

$$\alpha = \Omega_1 \frac{R_1+R_2}{R_1R_2} - 1 = 1{,}60 \cdot \frac{3{,}0}{2{,}0} - 1 = 1{,}40 \pm 0{,}08,$$

$$R_3 = \alpha R_2 = 2{,}8 \pm 0{,}15 \text{ кОм}.$$

Погрешность: $\Delta\alpha = 1{,}5\,\Delta\Omega_1 = 0{,}075$ (множитель $(R_1+R_2)/(R_1R_2) = 1{,}5$ кОм$^{-1}$).

3. Диапазон R_x. Ключ разомкнут, ручку ставим в крайние положения:

$\Omega_{\min} = 0{,}834$ кОм, $\Omega_{\max} = 2{,}74$ кОм. Для параллельных ветвей

$$\Omega = \frac{(R_1 + R_x)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_x + R_2 + R_3};$$

выразим R_x:

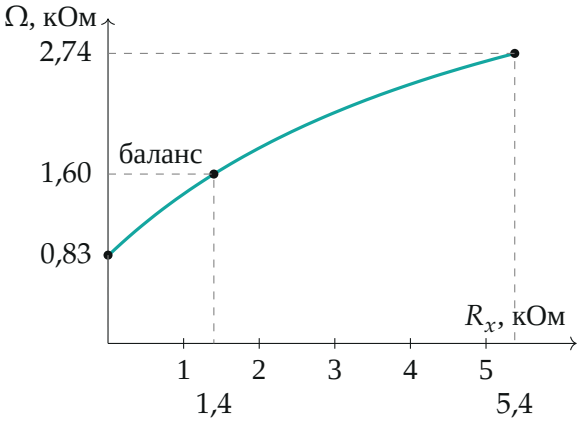
$$R_x = \frac{\Omega\,(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 - \Omega} - R_1.$$

Подставим ($R_2 + R_3 = 4{,}8$ кОм):

$$R_{x\,\min} = \frac{0{,}834 \cdot 4{,}8}{3{,}966} - 1{,}0 = 0{,}01 \approx 0,$$

$$R_{x\,\max} = \frac{2{,}74 \cdot 4{,}8}{2{,}06} - 1{,}0 = 5{,}4 \text{ кОм}.$$

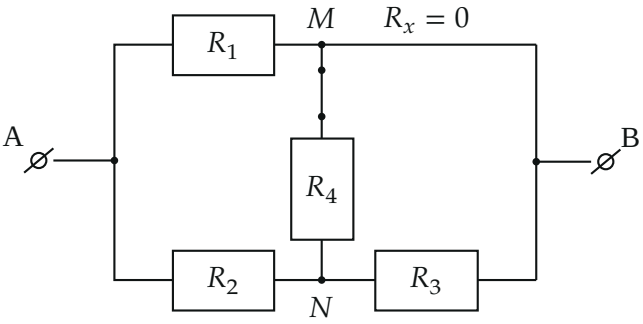
Итак, $0 \le R_x \le 5{,}4$ кОм. Погрешность верхней границы велика: знаменатель $R_2 + R_3 - \Omega_{\max}$ мал, и ошибка R_3 в 0,15 кОм даёт $\pm 0{,}3$ кОм.



Показание омметра при разомкнутом ключе в зависимости от R_x (расчёт при $R_3 = 2{,}8$ кОм) и три измеренные точки: $\Omega_{\min}$, баланс Ω_1 при $R_x = \alpha R_1 = 1{,}4$ кОм и $\Omega_{\max}$

4. Сопротивление R_4. Ставим ручку в положение $\Omega_{\min}$ (тогда $R_x = 0$) и замыкаем ключ: $\Omega_4 = 0{,}711$ кОм. Теперь узел M соединён с B

напрямую, и R_4 подключён параллельно R_3 (между N и B). Схема: R_1 параллельно цепочке $R_2 + R_{34}$, где $R_{34} = \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$.



Ключ замкнут, $R_x = 0$: точка M совпадает с B, резистор R_4 стоит параллельно R_3

По правилу параллельного соединения

$$\frac{1}{\Omega_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_{34}} \quad \Longrightarrow \quad R_{34} = \frac{\Omega_4 R_1}{R_1 - \Omega_4} - R_2,$$

$$R_{34} = \frac{0{,}711 \cdot 1{,}0}{0{,}289} - 2{,}0 = 0{,}460 \text{ кОм}.$$

Из $\dfrac{1}{R_{34}} = \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}$:

$$R_4 = \frac{R_3 R_{34}}{R_3 - R_{34}} = \frac{2{,}8 \cdot 0{,}460}{2{,}34} = 0{,}55 \text{ кОм}.$$

Обратите внимание: R_{34} — малая разность двух близких чисел (2,460 – 2,0), поэтому ошибка Ω_4 всего в 0,005 кОм меняет R_4 на $\approx$ 0,08 кОм. Погрешность R_4 около 15 %: $R_4 = 0{,}55 \pm 0{,}08$ кОм (настоящее значение, по словам организаторов, 0,51 кОм). У организаторов в ответе $R_{34} = 0{,}448$ и $R_4 = 0{,}53$ кОм — арифметическая неточность: по их же формуле $R_{34} = 0{,}460$ кОм.

Проверка. Расчёт $\Omega_{\min}$ при $R_x = 0$, $R_3 = 2{,}8$ кОм: $\dfrac{1{,}0 \cdot 4{,}8}{5{,}8} = 0{,}828$ кОм — совпадает с измеренным 0,834 кОм с точностью 1 %, значит, R_3 найдено верно. Предел: при $R_4 \to \infty$ замыкание ключа ничего бы не меняло, и Ω_4 было бы равно $\Omega_{\min}$; измеренное $\Omega_4 < \Omega_{\min}$ — резистор R_4 действительно шунтирует R_3.

Ответ. $R_3 = 2{,}8 \pm 0{,}15$ кОм; $R_4 = 0{,}55 \pm 0{,}08$ кОм; $0 \le R_x \le 5{,}4 \pm 0{,}3$ кОм (по данным измерений организаторов).