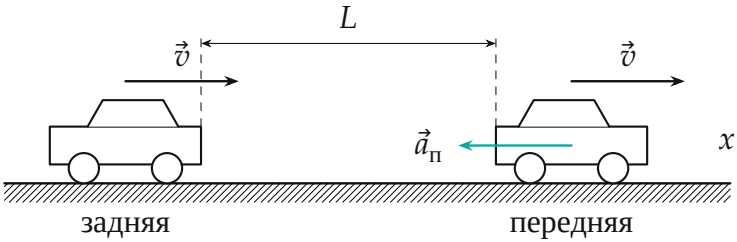
Безопасная дистанция

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Безопасная дистанция».

По прямому участку дороги с одинаковой скоростью v друг за другом едут две машины, одна из которых при торможении может двигаться с предельным ускорением a_1, а другая с a_2. Если с постоянным ускорением до полной остановки начинает тормозить водитель передней машины, то водитель задней реагирует и нажимает на педаль тормоза не сразу, а с задержкой $\tau = 0{,}3$ с. В зависимости от того, какая из машин едет впереди, безопасные дистанции, исключающие столкновение между ними, оказываются равными $L_1 = 6$ м или $L_2 = 9$ м. Определите, с какой скоростью едут машины. Оцените разность ускорений Δa машин, если известно, что сами ускорения примерно равны 5 м/с^2.



Поясняющий рисунок. Передняя машина начинает тормозить с ускорением $\vec{a}_п$, задняя — через время τ; L — дистанция между машинами в момент начала торможения.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Передняя машина начинает тормозить; задняя ещё время τ едет с прежней скоростью, а потом тоже тормозит, но со своим ускорением. Дистанция безопасна, если задняя машина остановится не дальше того места, где остановилась передняя. Главная идея — записать безопасную дистанцию для двух вариантов расстановки: при сложении разность тормозных путей сокращается и остаётся только путь за время реакции, при вычитании — остаётся только разность тормозных путей. Это задача на равноускоренное движение двух тел.

Обозначения. Ось x — по направлению движения, начало — у переднего бампера задней машины в момент, когда передняя начала тормозить. $a_п$ и $a_з$ — модули ускорений передней и задней машин. L — безопасная (минимальная) дистанция.

1. Тормозной путь. Для равнозамедленного движения до остановки (скорость от v до 0) формула, связывающая скорости и перемещение:

$$0 - v^2 = -2as \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2a}.$$

2. Безопасная дистанция. Передняя машина от начала торможения до остановки проходит $\dfrac{v^2}{2a_п}$. Задняя за время реакции проходит $v\tau$ с постоянной скоростью, затем тормозной путь $\dfrac{v^2}{2a_з}$ (рис. 2). Чтобы машины не столкнулись, задняя должна остановиться не дальше, чем стоит передняя:

$$v\tau + \frac{v^2}{2a_з} \le L + \frac{v^2}{2a_п} \quad \Rightarrow \quad L = v\tau + \frac{v^2}{2a_з} - \frac{v^2}{2a_п}.$$

На графике скоростей (рис. 2, 3) L — площадь между графиками $v(t)$ задней и передней машин: разность их путей.

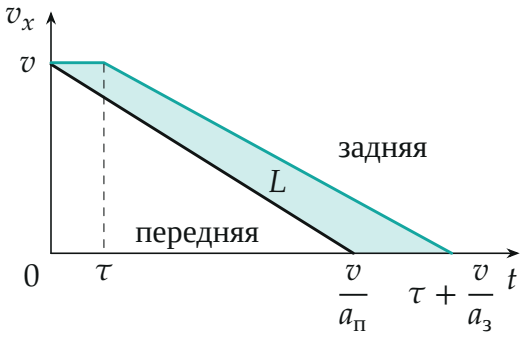


Рис. 2. Задняя машина тормозит слабее передней, $a_з < a_п$ (схема, разница ускорений и τ увеличены). Закрашенная площадь — разность путей, равная безопасной дистанции.

3. Два варианта расстановки. Если впереди машина с ускорением a_2, а сзади — с a_1, дистанция L_1; если наоборот — L_2:

$$L_1 = v\tau + \frac{v^2}{2a_1} - \frac{v^2}{2a_2}, \qquad L_2 = v\tau + \frac{v^2}{2a_2} - \frac{v^2}{2a_1}.$$

Скорость. Складываем: разность тормозных путей сокращается,

$$L_1 + L_2 = 2v\tau \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L_1 + L_2}{2\tau} = \frac{6+9}{2\cdot 0{,}3}\ \text{м/с} = 25\ \text{м/с}.$$

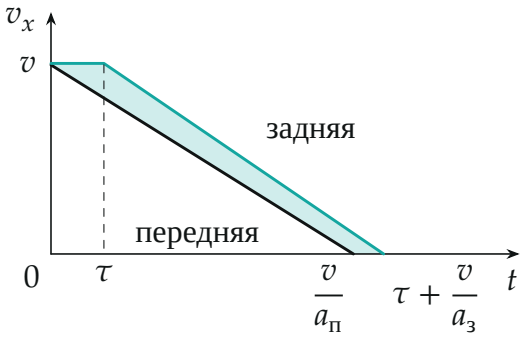


Рис. 3. Задняя машина тормозит сильнее, $a_з > a_п$: тормозной путь задней короче, и дистанция меньше, чем $v\tau$ (схема).

4. Разность ускорений. Вычитаем первое равенство из второго:

$$L_2 - L_1 = v^2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) = v^2\,\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}.$$

$L_2 > L_1$, поэтому $a_1 > a_2$: дистанция больше, когда сзади едет машина с худшими тормозами. При $a_1 a_2 \approx (5\ \text{м/с}^2)^2$:

$$\Delta a = a_1 - a_2 = \frac{(L_2 - L_1)\,a_1 a_2}{v^2} \approx \frac{3\cdot 25}{625}\ \text{м/с}^2 \approx 0{,}12\ \text{м/с}^2.$$

Обратите внимание. Формула пункта 2 предполагает, что машины сближаются до самой остановки задней, и наименьшее расстояние — в

конце. Это так: скорость задней машины после начала её торможения сравнялась бы со скоростью передней только через $t = a_з\tau/(a_з - a_п) \approx 5 \cdot 0{,}3/0{,}12 \approx 12$ с, а остановки наступают через ≈ 5 с. Дистанция убывает монотонно (рис. 4).

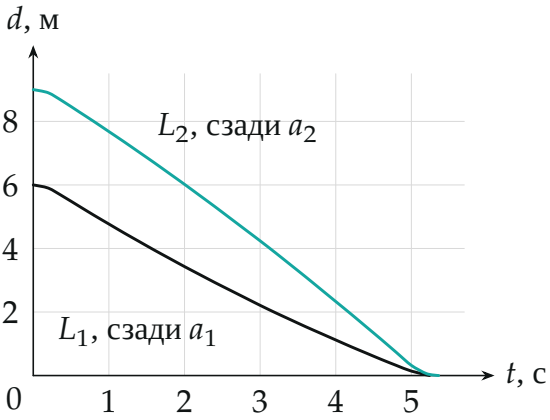


Рис. 4. Расстояние d между машинами при безопасной дистанции (расчёт при $v = 25$ м/с, $a_1 = 5{,}06$ м/с^2, $a_2 = 4{,}94$ м/с^2): убывает до нуля ровно к остановке задней машины.

Проверка. Размерность: $[L/\tau] = $ м/с, $[\Delta L\, a^2/v^2] = \dfrac{\text{м} \cdot \text{м}^2/\text{с}^4}{\text{м}^2/\text{с}^2} = $ м/с^2. При одинаковых ускорениях $L_1 = L_2 = v\tau$ — остаётся только путь за время реакции, как и должно быть. Подстановка $a_1 = 5{,}06$, $a_2 = 4{,}94$ м/с^2 в формулы пункта 3 даёт $L_1 = 6{,}0$ м и $L_2 = 9{,}0$ м. Смысл: 0,3 с реакции на скорости 90 км/ч — это 7,5 м, а различие тормозов всего на 2,4 % меняет дистанцию на $\pm 1{,}5$ м.

Ответ. $v = \dfrac{L_1 + L_2}{2\tau} = 25$ м/с; $\Delta a = \dfrac{(L_2 - L_1)a_1 a_2}{v^2} \approx 0{,}12$ м/с^2.