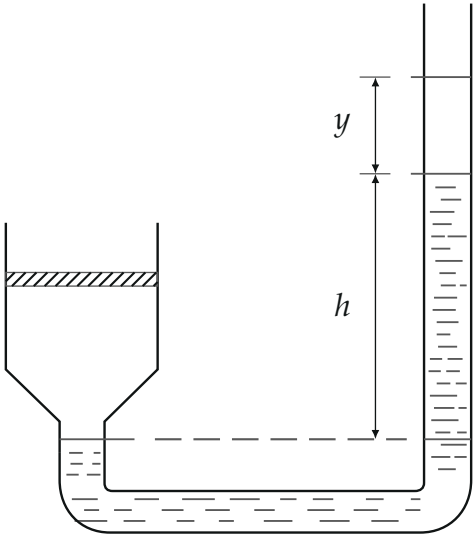
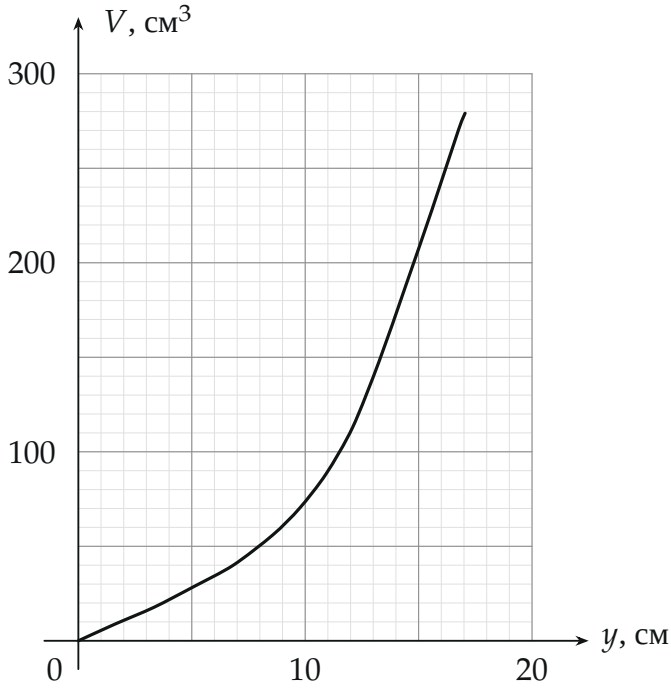
Масса поршня

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Масса поршня».

Цилиндрический сосуд с поршнем соединён коническим переходником с трубкой постоянного сечения. Разность уровней воды в правом и левом колене $h = 20$ см. В трубку медленно наливают воду, измеряя объём V добавленной воды и подъём уровня y в правом колене. С помощью графика зависимости V от y найдите массу поршня и объём конической части сосуда. Трение между поршнем и цилиндром не учитывайте. Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, $g = 10$ м/с^2.





▲ **Решение. Что происходит.** Поршень лежит на воздушной подушке: давление воздуха под ним держит вес поршня. Пока поршень на месте, давление воздуха постоянно, а значит, постоянна и разность уровней воды h. Доливаемая вода поднимает оба уровня на одну и ту же высоту y, и наклон графика dV/dy — это сумма площадей двух водных поверхностей. По наклонам находим сечения трубки и цилиндра, а по сечению цилиндра — массу поршня. Это задача на гидростатику сообщающихся сосудов и чтение графика.

Обозначения. s — сечение трубки, S — сечение цилиндра (поршня), M — масса поршня, p_0 — атмосферное давление, p — давление воздуха под поршнем.

1. Равновесие поршня. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на вертикаль (рис. 3): вверх давит воздух снизу, вниз — атмосфера сверху и сила тяжести,

$$pS - p_0S - Mg = 0.$$

Воздух под поршнем граничит с водой левого колена. Давление в воде на уровне левой поверхности одинаково в обоих коленах (вода покоится); в правом колене поверхность выше на h и открыта в атмосферу:

$$p = p_0 + \rho g h \quad \Rightarrow \quad Mg = \rho g h S, \qquad M = \rho h S.$$

Сечения S в условии нет — его даёт график.

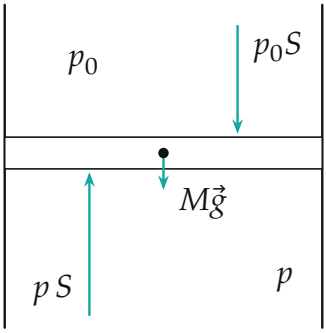


Рис. 3. Силы на поршень: давление воздуха снизу, атмосферы сверху и сила тяжести; длины стрелок: $pS = p_0 S + Mg$ (сила тяжести для наглядности увеличена: на деле $Mg \approx 0{,}02\, p_0 S$).

2. Что означает наклон графика. Давление воздуха постоянно, пока поршень покоится (пункт 1), поэтому разность уровней всё время равна h: когда правый уровень поднимается на dy, левый — тоже на dy. Объём долитой воды за этот шаг

$$dV = (s + A)\, dy, \qquad \frac{dV}{dy} = s + A,$$

где A — площадь водной поверхности в левом колене на этой высоте. Сжатие воздуха под поршнем не влияет: давление воздуха постоянно, а поршень поднимается вместе с водой.

3. Три участка графика (рис. 4). Начальный прямой участок — левый уровень ещё в трубке, $A = s$. Изогнутый участок — левый уровень идёт по конусу, A растёт от s до S. Конечный прямой участок — уровень в цилиндре, $A = S$. Наклоны прямых участков по графику (касательные

на рис. 4):

$$2s = \left(\frac{\Delta V}{\Delta y}\right)_{\text{нач}} \approx 5{,}4 \text{ см}^2,$$

$$S + s = \left(\frac{\Delta V}{\Delta y}\right)_{\text{кон}} \approx \frac{270 - 188}{16{,}8 - 14{,}4} \text{ см}^2 \approx 35 \text{ см}^2.$$

Отсюда $s \approx 2{,}7$ см^2, $S \approx 32{,}5$ см^2.

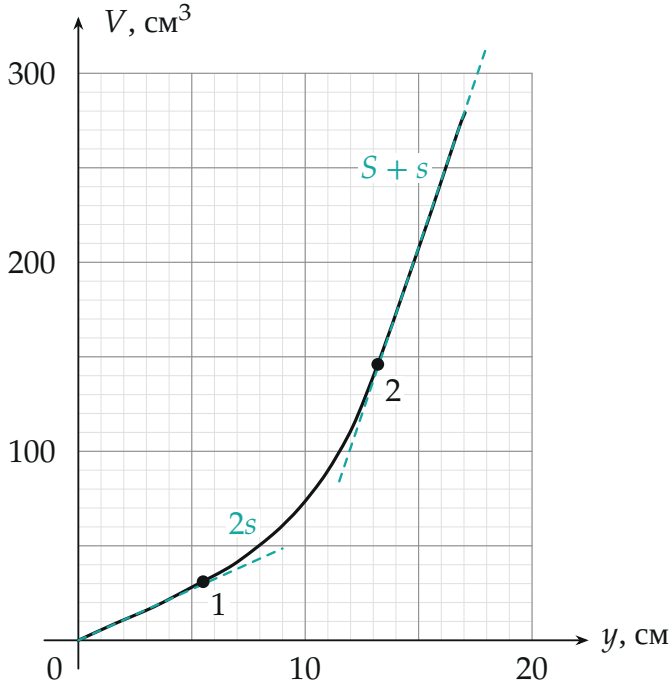


Рис. 4. Касательные к начальному и конечному участкам графика (бирюзой) и границы изогнутого участка: точка 1 — вода дошла до конуса, точка 2 — до цилиндра.

4. Масса поршня.

$$M = \rho h S \approx 1{,}0 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 20 \text{ см} \cdot 32{,}5 \text{ см}^2 \approx 650 \text{ г}.$$

5. Объём конуса. Пока левый уровень проходит конус (от точки 1 до точки 2 на рис. 4), долитая вода заполняет конус слева и поднимает воду

в правой трубке на $y_2 - y_1$:

$$V_2 - V_1 = V_x + s\,(y_2 - y_1) \quad \Rightarrow \quad V_x = V_2 - V_1 - s\,(y_2 - y_1).$$

Точки, где график отходит от прямых: $y_1 \approx 5{,}5$ см, $V_1 \approx 31$ см^3; $y_2 \approx 13{,}2$ см, $V_2 \approx 146$ см^3:

$$V_x \approx 146 - 31 - 2{,}7 \cdot 7{,}7 \approx 95 \text{ см}^3.$$

У организаторов в решении $V_x = 98$ см^3 (по точке $V = 120$ см^3, $y = 9$ см, которой на графике нет); в пределах точности чтения графика это то же значение — около 100 см^3.

Обратите внимание. Оба уровня поднимаются на одинаковую высоту только потому, что давление воздуха задано весом поршня и не меняется. Если бы сосуд был закрыт неподвижной крышкой, воздух сжимался бы и разность уровней росла.

Проверка. Размерность: $[\rho h S] = \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}\cdot\text{см}\cdot\text{см}^2 = \text{г}$. Второй способ для конуса — формула усечённого конуса: высота конуса равна $y_2 - y_1 \approx 7{,}7$ см, $V_x = \frac{y_2 - y_1}{3}(s + S + \sqrt{sS}) \approx \frac{7{,}7}{3}(2{,}7 + 32{,}5 + 9{,}4) \approx 1{,}1 \cdot 10^2$ см^3 — тот же порядок, с точностью чтения границ участков. Смысл: груз в 650 г держится столбом воды высотой всего 20 см, потому что поршень широкий — в 12 раз шире трубки.

Ответ. $M = \rho h S \approx 650$ г; $V_x \approx 95$ см^3 (около 100 см^3).