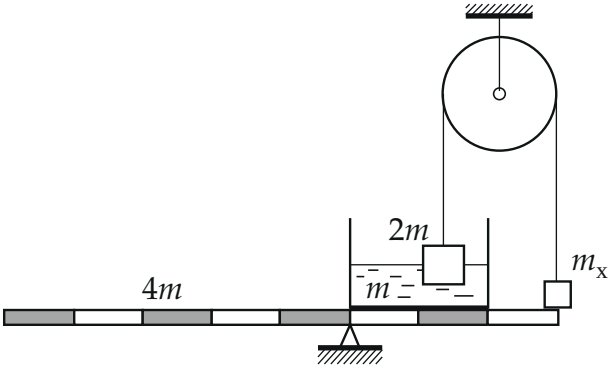
Жидкое равновесие

Задача 3. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Жидкое равновесие».

Прямоугольный лёгкий сосуд с жидкостью массой m помещён на однородный рычаг массой $4m$. В жидкость опущено тело массой $2m$ (с плотностью меньшей, чем плотность жидкости), удерживаемое нитью, перекинутой через блок (см. рисунок). Какой массы m_x груз необходимо прикрепить к противоположному концу нити и разместить на краю рычага, чтобы система осталась в равновесии? Трения в осях рычага и блока нет. Необходимые расстояния можно взять из рисунка.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело легче жидкости и само всплыло бы; нить тянет его вверх, а сила Архимеда зависит от того, насколько оно погружено. Сосуд давит на рычаг весом жидкости плюс сила, равная силе Архимеда, — по третьему закону Ньютона тело давит на жидкость с той же силой, с какой жидкость выталкивает тело. Груз m_x стоит на рычаге, и нить разгружает его. Уравнений равновесия три (тело, груз, рычаг), а неизвестных четыре: T, F_{A}, сила давления груза N и m_x. Поэтому ответ — не число, а промежуток, и его концы находятся из предельных случаев. Это задача на правило моментов вместе с законом Архимеда.

Обозначения. d — длина одной клетки рычага (на рисунке их 8, опора — после пятой слева). T — натяжение нити (блок без трения — одно на всей нити), F_{A} — сила Архимеда на тело $2m$, N — сила, с которой

груз m_x давит на рычаг. Плечи относительно опоры (рис. 2): центр рычага — в d левее опоры, центр дна сосуда — в d правее, груз m_x — в $3d$ правее.

1. Тело $2m$**.** Условие равновесия (сумма сил равна нулю) в проекции на вертикаль вверх (рис. 3):

$$T + F_{\text{A}} - 2mg = 0.$$

2. Груз m_x**.** На него действуют сила тяжести, нить вверх и реакция рычага N вверх:

$$T + N - m_x g = 0.$$

3. Сила давления сосуда на рычаг. Жидкость в покое; на неё действуют сила тяжести mg, сила F_{A} со стороны тела (третий закон Ньютона) и сила со стороны дна. Значит, дно давит на рычаг с силой

$$F = mg + F_{\text{A}},$$

и давление на дно одинаково по всей площади, где бы ни было тело, — эта сила приложена к середине дна.

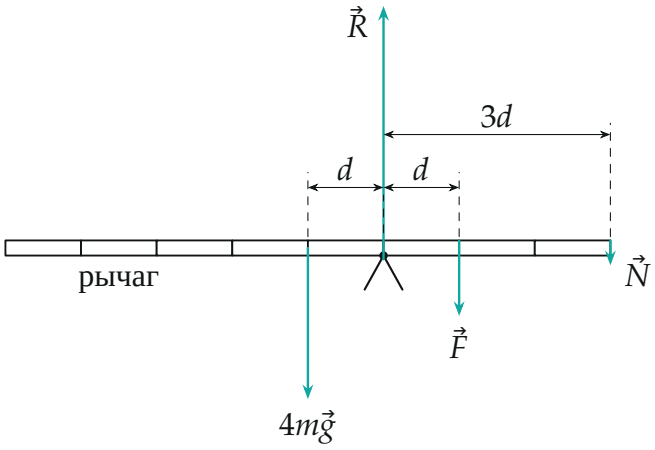


Рис. 2. Силы на рычаг и их плечи относительно опоры: тяжесть рычага, давление сосуда $F = mg + F_A$, давление груза N, реакция опоры $\vec{R}$. Длины стрелок — для $F_A = mg$.

4. Рычаг. Правило моментов относительно опоры (момент реакции опоры $\vec{R}$ равен нулю — поэтому ось выбрана там):

$$4mg \cdot d = F \cdot d + N \cdot 3d \quad \Rightarrow \quad N = \frac{4mg - mg - F_\text{A}}{3} = mg - \frac{F_\text{A}}{3}.$$

5. Масса груза. Из пунктов 1 и 2:

$$m_x g = T + N = (2mg - F_\text{A}) + \left(mg - \frac{F_\text{A}}{3}\right) = 3mg - \frac{4}{3}F_\text{A}.$$

Чем глубже погружено тело, тем больше F_A и тем легче нужен груз (рис. 4).

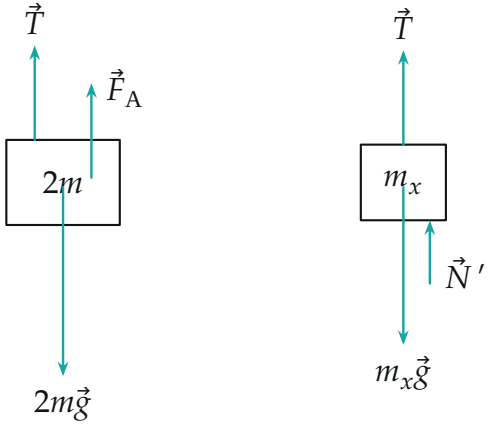


Рис. 3. Силы на тело $2m$ и на груз m_x (для $F_\text{A} = mg$: $T = mg$, $N = \frac{2}{3}mg$, $m_x = \frac{5}{3}m$); $\vec{N}'$ — реакция рычага, равная по модулю N.

6. Границы. Сила Архимеда не может быть меньше нуля, а натяжение нити — меньше нуля (нить только тянет), поэтому $0 \le F_\text{A} \le 2mg$.

Тело вышло из жидкости, $F_\text{A} = 0$: $m_x = 3m$ — самый тяжёлый допустимый груз. Если груз ещё тяжелее, правый конец рычага опускается, тело поднимается из жидкости, и равновесия нет.

Нить провисает, $T = 0$, $F_\text{A} = 2mg$ — тело плавает само: $m_x = 3m - \frac{8}{3}m = \frac{m}{3}$ — самый лёгкий груз. Если груз легче, рычаг поворачивается левым концом вниз.

Сила $N = mg - F_A/3 \geq mg/3 > 0$ на всём промежутке — груз действительно стоит на рычаге.

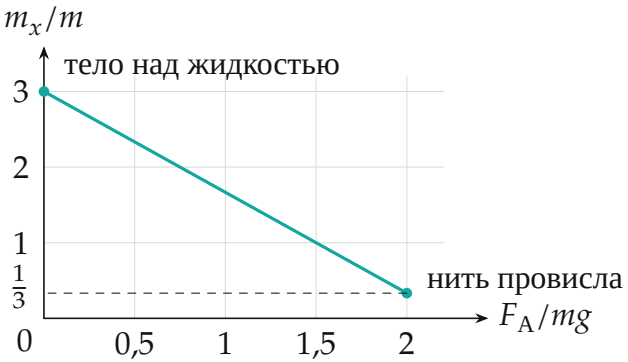


Рис. 4. Нужная масса груза в зависимости от силы Архимеда (от глубины погружения тела).

Обратите внимание. Сосуд давит на рычаг не только весом жидкости: к нему добавляется сила F_A, ведь тело, которое держит нить, давит на жидкость. Где именно в сосуде тело, неважно: давление на дно распределяется равномерно.

Проверка. Второй способ для нижней границы: при $T = 0$ тело просто плавает, и сосуд вместе с телом — одно целое массой $3m$ над точкой d справа; правило моментов $4m \cdot d = 3m \cdot d + m_x \cdot 3d$ даёт $m_x = m/3$ — совпадает. Для верхней: тело висит на нити, $T = 2mg$, сосуд давит только весом mg: $4m \cdot d = m \cdot d + (m_x - 2m) \cdot 3d$, $m_x = 3m$ — совпадает. Смысл: весь промежуток — это разные глубины погружения тела, и каждую можно выставить подбором груза.

Ответ. $\dfrac{m}{3} < m_x < 3m$ (на концах промежутка — предельные случаи: при $m_x = \frac{m}{3}$ нить провисает, при $m_x = 3m$ тело выходит из жидкости).