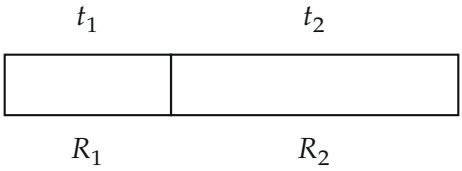
Электротермодинамика

Задача 4. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Электротермодинамика».

Два цилиндрических проводника разной длины, но одинакового диаметра, изготовлены из меди. Их сопротивления и температуры (в градусах Цельсия) соответственно равны: R_1, R_2, t_1, t_2. Проводники соединяют плоскими гранями. Каким окажется сопротивление составного проводника после того, как температуры его частей выровняются? Теплообменом с окружающей средой и тепловым расширением меди пренебречь.



Примечание: сопротивление проводника при температуре t равно $R = R_0(1 + \beta(t - t_0))$, где R_0 — сопротивление проводника при $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$; β — температурный коэффициент сопротивления, причём $\beta t \ll 1$.

▲ **Решение. Что происходит.** Горячий проводник отдаёт теплоту холодному, пока температуры не сравняются; это задача на тепловой баланс. Сопротивление одного куска растёт, другого падает. Главная идея: и теплоёмкость, и сопротивление куска пропорциональны его длине (медь и сечение одинаковы), поэтому изменение сопротивления каждого куска пропорционально теплоте, которую он получил. Сумма полученных теплот равна нулю — значит, и сумма изменений сопротивлений равна нулю.

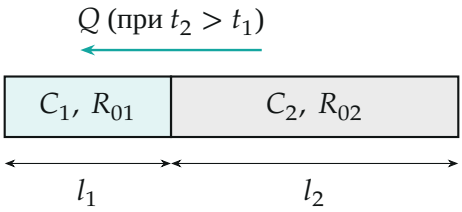
Обозначения. l_1, l_2 — длины кусков, S — общее сечение; R_{01}, R_{02} — их сопротивления при $0\,^\circ\mathrm{C}$; C_1, C_2 — теплоёмкости; t — общая температура в конце; Q_1, Q_2 — теплоты, полученные кусками.

1. Сопротивление и теплоёмкость пропорциональны длине. Сопротивление куска меди при $0\,^\circ\mathrm{C}$ $R_{0i} = \rho_0 l_i / S$ (ρ_0 — удельное сопротивление меди при $0\,^\circ\mathrm{C}$), его теплоёмкость $C_i = c\,\rho_\text{м} S l_i$ (c — удельная

теплоёмкость, $\rho_м$ — плотность меди). Отношение у обоих кусков одно и то же:

$$\frac{R_{0i}}{C_i} = \frac{\rho_0}{c\,\rho_м S^2} \equiv k, \qquad R_{0i} = kC_i.$$

Множитель k одинаков, потому что материал и сечение одинаковы; от длины он не зависит.



Длины l_1 и l_2 задают и сопротивления, и теплоёмкости кусков; теплота Q переходит от горячего куска к холодному

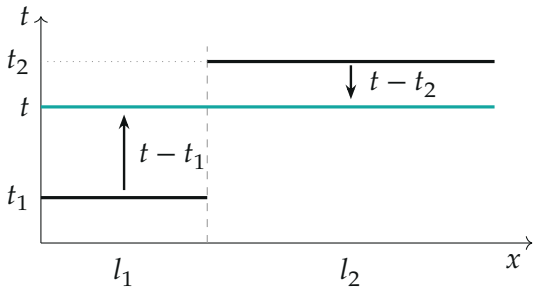
2. Уравнение теплового баланса. Система двух кусков теплоизолирована, работа не совершается (расширением пренебрегаем), поэтому по закону сохранения энергии сумма теплот, полученных кусками от начала до выравнивания температур, равна нулю:

$$Q_1 + Q_2 = 0, \qquad C_1(t - t_1) + C_2(t - t_2) = 0.$$

Отсюда общая температура

$$t = \frac{C_1 t_1 + C_2 t_2}{C_1 + C_2} = \frac{R_{01} t_1 + R_{02} t_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

Она лежит между t_1 и t_2 и ближе к температуре более длинного куска.



Температура вдоль составного проводника до (чёрное) и после (бирюза) выравнивания; пример $l_2 = 2l_1$, $t_1 = 20\,°C$, $t_2 = 80\,°C$, $t = 60\,°C$. Площади «прямоугольников» $l_1(t - t_1)$ и $l_2(t_2 - t)$ равны

3. Изменение сопротивления каждого куска. Сопротивление куска линейно зависит от температуры: $R_i = R_{0i}(1 + \beta t_i)$. При переходе от t_i к t оно меняется на

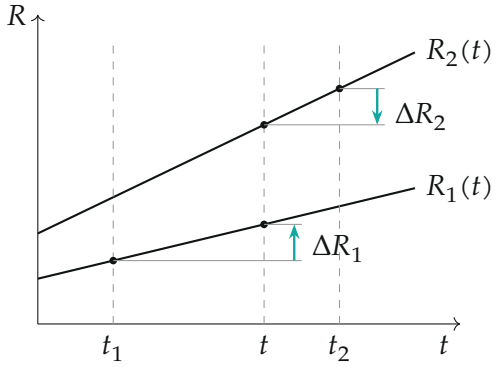
$$\Delta R_i = R_{0i}\beta\,(t - t_i) = k\beta\,C_i(t - t_i) = k\beta\,Q_i.$$

Изменение сопротивления куска пропорционально полученной им теплоте с одним и тем же для обоих кусков множителем $k\beta$.

4. Сопротивление составного проводника. Куски соединены последовательно, поэтому до и после их сопротивления складываются, и

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 = k\beta\,(Q_1 + Q_2) = 0.$$

Сопротивление нагревшегося куска выросло ровно на столько, на сколько уменьшилось сопротивление остывшего.



Зависимости $R_1(t)$ и $R_2(t)$ для того же примера ($R_{02} = 2R_{01}$; наклон β для наглядности преувеличен): у длинного куска прямая вдвое круче, но температура меняется вдвое меньше, $\Delta R_2 = -\Delta R_1$

Обратите внимание: ответ не зависит ни от t_1, t_2, ни от β. Условие $\beta t \ll 1$ позволяет считать и сами R_1, R_2 пропорциональными длинам; в ответ они входят уже как данные.

Соберём ответ. До выравнивания сопротивление было $R_1 + R_2$, изменение равно нулю: $R = R_1 + R_2$.

Проверка. Второй способ — прямым счётом через разности температур:

$$t - t_1 = \frac{R_{02}(t_2 - t_1)}{R_{01} + R_{02}}, \qquad t - t_2 = \frac{R_{01}(t_1 - t_2)}{R_{01} + R_{02}},$$

$$\Delta R_1 = \beta R_{01}(t - t_1) = \beta \frac{R_{01}R_{02}(t_2 - t_1)}{R_{01} + R_{02}} = -\beta R_{02}(t - t_2) = -\Delta R_2.$$

Предел: при $t_1 = t_2$ ничего не происходит, и ответ $R_1 + R_2$ очевиден. Смысл: изменение сопротивления кусочка меди пропорционально изменению его энергии, а полная энергия сохраняется.

Ответ. Сопротивление не изменится: $R = R_1 + R_2$.