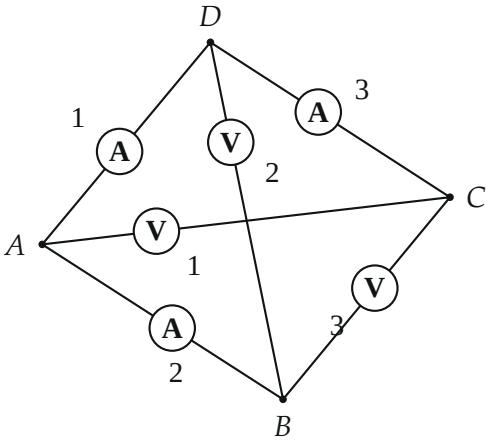
Электрический тетраэдр

Задача 5. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 9 класс, задача 5] «Электрический тетраэдр».

В рёбра тетраэдра $ABCD$ включены три амперметра с внутренним сопротивлением $R_\text{A} = 0{,}1$ Ом и три вольтметра с внутренним сопротивлением $R_\text{V} = 10$ кОм. Определите показания всех приборов при подключении источника с напряжением $U_0 = 1{,}5$ В:

а) к точкам A и D;

б) к точкам B и C.



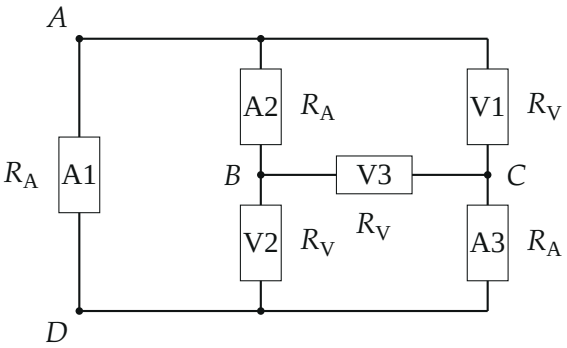
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эквивалентную схему: тетраэдр — просто четыре узла и шесть рёбер, его нужно перерисовать плоско, отметив, к каким узлам подключён источник. Главная идея — сопротивления приборов различаются в $R_\text{V}/R_\text{A} = 10^5$ раз. Поэтому в каждом контуре можно сначала пренебречь малым: токами через вольтметры по сравнению с токами амперметров и напряжениями на амперметрах по сравнению с напряжениями вольтметров — а затем найти малые величины по уже найденным большим.

Обозначения. Приборы нумеруем как на рисунке: амперметры A1 (ребро AD), A2 (AB), A3 (DC), вольтметры V1 (AC), V2 (BD), V3 (BC).

Показание амперметра — ток I через его ребро, вольтметра — напряжение U на его ребре.

Пункт а) Источник подключён к A и D.

1. Эквивалентная схема. Узлы A и D рисуем сверху и снизу, между ними — три ветви: амперметр A1; цепочка A2 — B — V2; цепочка V1 — C — A3; узлы B и C соединяет вольтметр V3.



Эквивалентная схема для случая а): источник между A и D

2. Амперметр A1. Он подключён прямо к источнику, по закону Ома для участка

$$I_1 = \frac{U_0}{R_A} = \frac{1{,}5}{0{,}1} = 15\ \text{А}.$$

3. Вольтметры. Узел B соединён с A амперметром A2, узел C с D — амперметром A3. Через них текут только токи вольтметров (порядка U_0/R_V), и напряжения на них порядка $R_A U_0/R_V = 10^{-5}U_0$ — ничтожно малы. Значит, $\varphi_B \approx \varphi_A$, $\varphi_C \approx \varphi_D$, и каждый вольтметр включён между точками с разностью потенциалов U_0:

$$U_1 = U_{AC} \approx U_0, \qquad U_2 = U_{BD} \approx U_0, \qquad U_3 = U_{BC} \approx U_0 = 1{,}5\ \text{В}.$$

Токи через вольтметры по закону Ома: $I_V = U_0/R_V = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ А.

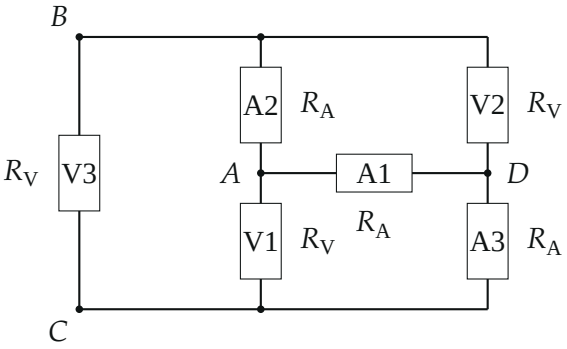
4. Амперметры A2 и A3. Закон сохранения заряда для узла B (первое правило Кирхгофа): ток, пришедший через A2, уходит через V2 и V3;

для узла C: через A3 уходят токи, пришедшие через V1 и V3. Поэтому

$$I_2 = I_{V2} + I_{V3} = \frac{2U_0}{R_V} = 3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{А}, \qquad I_3 = I_{V1} + I_{V3} = 3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{А}.$$

Пункт б) Источник подключён к B и C.

5. Эквивалентная схема. Теперь сверху и снизу — узлы B и C. Между ними: вольтметр V3; цепочка A2 — A — V1; цепочка V2 — D — A3; узлы A и D соединяет амперметр A1.



Эквивалентная схема для случая б): источник между B и C

6. Ток через амперметры. Путь $B \to A \to D \to C$ состоит из трёх амперметров подряд, сопротивление $3R_A = 0{,}3$ Ом. Параллельно его кускам стоят вольтметры V1 и V2 с сопротивлением в 10^5 раз больше — через них ответвляется ничтожная доля тока (около 10^{-4} А из 5 А). Поэтому амперметры соединены практически последовательно, и по закону Ома

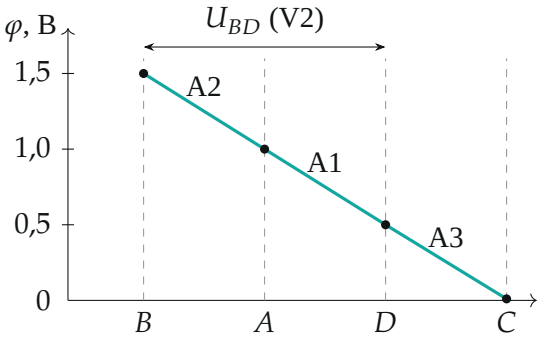
$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_0}{3R_A} = \frac{1{,}5}{0{,}3} = 5{,}0\ \text{А}.$$

7. Вольтметры. V3 включён прямо на источник: $U_3 = U_0 = 1{,}5$ В. Вольтметр V2 (ребро BD) показывает напряжение на двух амперметрах A2 и A1, вольтметр V1 (ребро AC) — на A1 и A3:

$$U_2 = U_{BA} + U_{AD} = 2R_A I, \qquad U_1 = U_{AD} + U_{DC} = 2R_A I,$$

$$U_1 = U_2 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 5{,}0 = 1{,}0\ \text{В}.$$

Потенциал вдоль цепочки амперметров падает равномерно: каждый «съедает» треть напряжения источника.



Случай б): потенциалы узлов при $\varphi_C = 0$. На каждом амперметре падает 0,5 В; вольтметр V2 между B и D показывает 1,0 В, V1 между A и C — тоже 1,0 В

Обратите внимание: в случае а) амперметр A1 показывает огромный ток 15 А, а A2 и A3 — в $5 \cdot 10^4$ раз меньше, хотя это такие же амперметры: через них идёт только ток вольтметров. Подключение амперметра прямо к источнику — почти короткое замыкание.

Проверка. Точный расчёт цепи (метод узловых потенциалов, python) даёт в случае а) $I_1 = 15$ А, $I_2 = I_3 = 2{,}9999 \cdot 10^{-4}$ А, $U_1 = U_2 = 1{,}49997$ В, $U_3 = 1{,}49994$ В; в случае б) $I_1 = I_2 = I_3 = 5{,}0000$ А, $U_1 = U_2 = 0{,}99999 \approx 1{,}0$ В. Поправки — порядка $R_\text{A}/R_\text{V} = 10^{-5}$, как и ожидалось. Предел: при $R_\text{V} \to \infty$ вольтметры — разрывы, и все ответы становятся точными.

Ответ. а) амперметр AD: 15 А; амперметры AB и CD: $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ А; вольтметры AC, BC, BD: 1,5 В; б) амперметры BA, AD, DC: 5,0 А; вольтметр BC: 1,5 В; вольтметры BD и AC: 1,0 В.