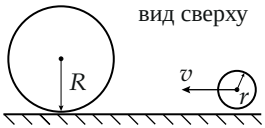
Шайбы и стенка

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 1] «Шайбы и стенка».

Две шайбы находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Малая шайба радиуса r движется со скоростью v вдоль вертикальной стенки при малом зазоре с ней. Большая шайба радиуса $R = 7r$ касается стенки. Какую скорость u приобретёт большая шайба после всех столкновений, если массы шайб одинаковы? Трения в системе нет, столкновения шайб друг с другом и со стенкой абсолютно упругие.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача класса «упругий косой удар одинаковых шайб». Сила удара гладких шайб направлена по линии центров, поэтому вдоль касательной к точке контакта скорости шайб не меняются, а вдоль линии центров одинаковые массы при упругом ударе просто обмениваются проекциями скоростей. Удар будет не один: после первого удара малая шайба уходит к стенке, отражается от неё и тут же снова бьёт большую. Задача — аккуратно провести три удара (шайба — стенка — шайба), раскладывая скорости на оси «линия центров» и «касательная».

Обозначения. Стенка горизонтальна на рисунках (вид сверху), малая шайба едет влево. Ось n — по линии центров от малой шайбы к большой, ось τ — по касательной в точке контакта, направлена к стенке; α — угол между линией центров и стенкой.

1. Геометрия удара. В момент касания расстояние между центрами $R + r = 8r$, а разность их расстояний до стенки $R - r = 6r$ (рис. 1). Из прямоугольного треугольника

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r} = \frac{3}{4}, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66, \qquad \alpha \approx 48{,}6^\circ.$$

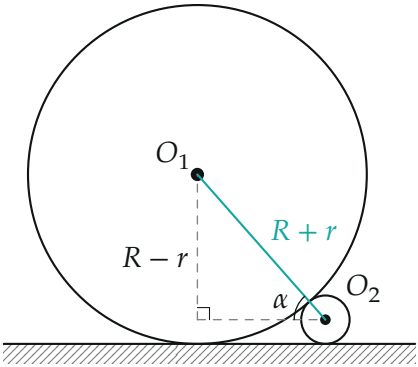


Рис. 1. Момент первого удара (вид сверху). Линия центров O_2O_1 составляет со стенкой угол α, $\sin\alpha = (R-r)/(R+r)$.

2. Первый удар шайб. Раскладываем скорость v малой шайбы на оси n и τ (рис. 2):

$$v_n = v\cos\alpha, \qquad v_\tau = v\sin\alpha.$$

Большая шайба покоится. Сила удара направлена по n, поэтому проекции на τ сохраняются: у малой шайбы $v\sin\alpha$, у большой 0. Проекции на n находим из законов сохранения импульса и энергии для упругого удара шайб равной массы — они обмениваются:

$$\text{большая: } u_1 = v\cos\alpha \text{ вдоль } n, \qquad \text{малая: } v\sin\alpha \text{ вдоль } \tau.$$

Малая шайба после удара движется по τ, то есть к стенке под углом $90^\circ - \alpha$ к ней.

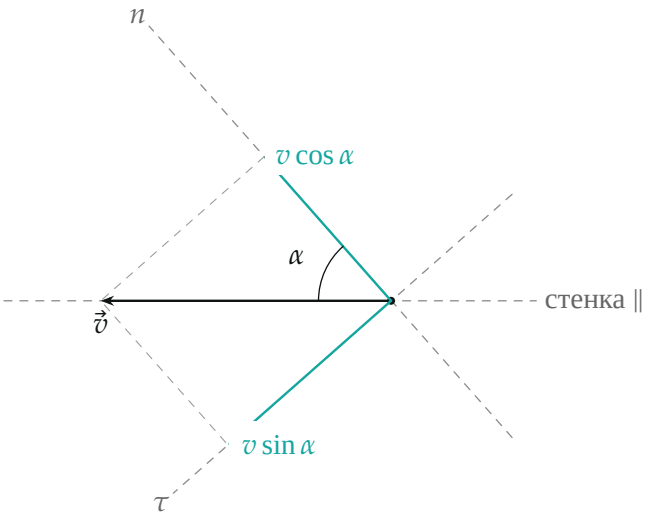


Рис. 2. План скоростей перед первым ударом: скорость малой шайбы $\vec{v}$ (вдоль стенки) раскладываем на линию центров n и касательную τ. Составляющая по τ направлена в стенку.

3. Отскок от стенки. Зазор мал, поэтому малая шайба долетает до стенки, почти не отойдя от большой. Удар о стенку упругий: проекция скорости вдоль стенки сохраняется, перпендикулярная меняет знак. Скорость малой шайбы $v\sin\alpha$ по τ имеет проекции

$$\text{вдоль стенки: } v\sin\alpha\cdot\sin\alpha = v\sin^2\alpha, \qquad \text{к стенке: } v\sin\alpha\cos\alpha,$$

после отскока — $v\sin^2\alpha$ вдоль стенки и $v\sin\alpha\cos\alpha$ от стенки. У большой шайбы скорость $v\cos\alpha$ по n: вдоль стенки $v\cos^2\alpha$, от стенки $v\sin\alpha\cos\alpha$ (рис. 3).

От стенки обе шайбы удаляются с одинаковой скоростью, а вдоль стенки малая быстрее на

$$v\sin^2\alpha - v\cos^2\alpha = v\left(\frac{9}{16} - \frac{7}{16}\right) = \frac{v}{8} > 0.$$

Малая шайба догоняет большую, и они, ещё касаясь друг друга, сразу же сталкиваются второй раз — при той же линии центров n.

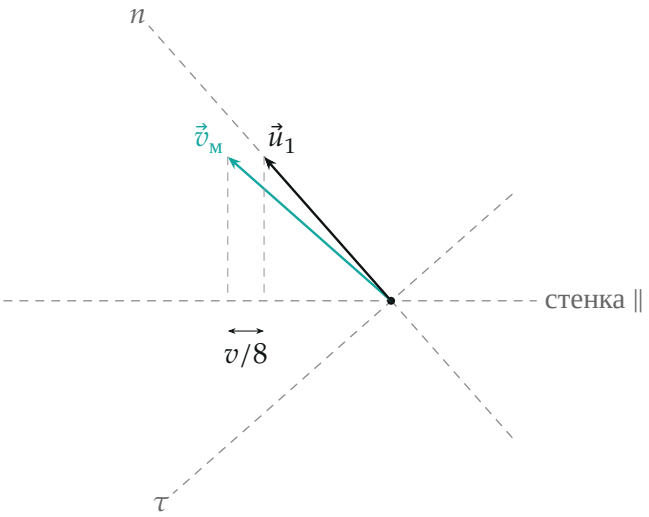


Рис. 3. План скоростей после первого удара и отскока малой шайбы от стенки: $\vec{u}_1$ — большая, $\vec{v}_м$ — малая. Составляющие от стенки одинаковы ($v\sin\alpha\cos\alpha$), вдоль стенки у малой шайбы $v\sin^2\alpha$ — больше, чем $v\cos^2\alpha$ у большой.

4. Второй удар шайб. Снова раскладываем скорости на n и τ. Проекции на n (направление n составляет со стенкой угол α):

$$\text{малая: } v\sin^2\alpha\cos\alpha + v\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2v\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$\text{большая: } v\cos^2\alpha\cos\alpha + v\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha = v\cos\alpha.$$

Малая налетает быстрее ($2\sin^2\alpha = \frac{9}{8} > 1$) — удар действительно происходит. Проекции на n снова обмениваются, проекции на τ сохраняются. У большой шайбы касательная проекция была нулём (её скорость направлена точно по n), значит, после удара её скорость направлена по n и равна

$$u = 2v\sin^2\alpha\cos\alpha = 2v\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{9\sqrt{7}}{32}v \approx 0{,}74\,v.$$

5. Больше ударов нет. Малая шайба после второго удара имеет по n проекцию $v\cos\alpha$ — меньше, чем у большой ($\frac{9}{8}v\cos\alpha$): шайбы расходят-

ся. Её касательная проекция

$$v\sin^2\alpha\sin\alpha - v\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha = v\sin\alpha\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \frac{3}{32}v,$$

а составляющая от стенки у неё $v\cos\alpha\left(\sin\alpha - \frac{3}{32}\right) = \frac{21}{32}v\cos\alpha > 0$ — к стенке она больше не летит (рис. 4).

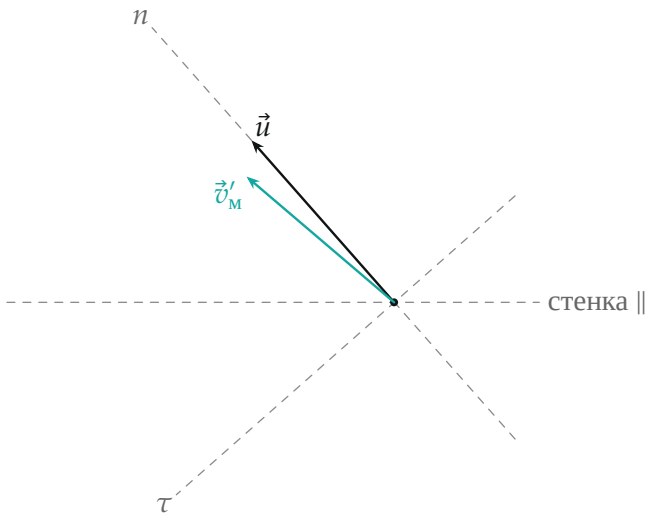


Рис. 4. План скоростей после второго удара: большая шайба уходит по линии центров со скоростью $u \approx 0{,}74v$, малая ($\vec{v}'_м$) — медленнее и тоже от стенки.

Обратите внимание: ответ «$u = v\cos\alpha$» после первого удара неверен — он забывает об отскоке малой шайбы от стенки. Именно стенка возвращает малой шайбе составляющую, перпендикулярную стенке, и делает возможным второй удар.

Проверка. Энергия: до ударов $\frac{mv^2}{2}$, после $\frac{m}{2}\left(u^2 + v_м^2\right)$, где $u^2 = \frac{567}{1024}v^2$, $v_м^2 = v^2\cos^2\alpha + \left(\frac{3}{32}v\right)^2 = \frac{448+9}{1024}v^2$; сумма $\frac{1024}{1024}v^2$ — энергия сохранилась, как и должно быть при упругих ударах. Предел $R = r$: $\sin\alpha = 0$, $u = 0$ — малая шайба проскакивает мимо по касательной, не толкая большую.

Стенка работает как «отражатель»: она переворачивает поперечную скорость малой шайбы и подаёт её на большую второй раз.

Ответ. $u = 2v\sin^2\alpha\cos\alpha = \dfrac{9\sqrt{7}}{32}\,v \approx 0{,}74\,v$, где $\sin\alpha = \dfrac{R-r}{R+r} = \dfrac{3}{4}$.