Автомобиль на конвейере

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 2] «Автомобиль на конвейере».

Автомобиль движется по горизонтальному неподвижному конвейеру со скоростью $v_0 = 20$ м/с в безветренную погоду. При этом половина мощности двигателя затрачивается на преодоление сопротивления воздуха, другая половина — на преодоление трения качения.

1. Навстречу автомобилю подул ветер со скоростью $v_0 = 20$ м/с (относительно земли). С какой установившейся скоростью v_1 относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась, а конвейер неподвижен?
2. В некоторый момент ветер утих, а конвейер стал двигаться с постоянной скоростью $v_0 = 20$ м/с в сторону, противоположную движению автомобиля. С какой установившейся скоростью v_2 относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась?

Примечание 1: сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату относительной скорости, сила трения качения постоянна. *Примечание 2:* во всех случаях проскальзывания колёс не возникает. *Примечание 3:* уравнение третьей степени можно решить методом подбора.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «мощность при установившемся движении». Скорость установилась — значит, силы, действующие на автомобиль, уравновешены, а мощность двигателя тратится на работу против сил сопротивления. Тонкость в том, относительно чего брать скорости: сопротивление воздуха зависит от скорости автомобиля *относительно воздуха*, а мощность двигателя — от скорости вращения колёс, то есть от скорости автомобиля *относительно ленты конвейера*. В трёх режимах эти две скорости разные.

Обозначения. $F_в = k w^2$ — сила сопротивления воздуха, w — скорость автомобиля относительно воздуха; $F_к$ — сила трения качения (постоянна); $F_т$ — сила трения покоя, с которой лента толкает ведущие колёса вперёд; $v_л$ — скорость автомобиля относительно ленты; r — радиус колеса, ω — его угловая скорость; P — мощность двигателя.

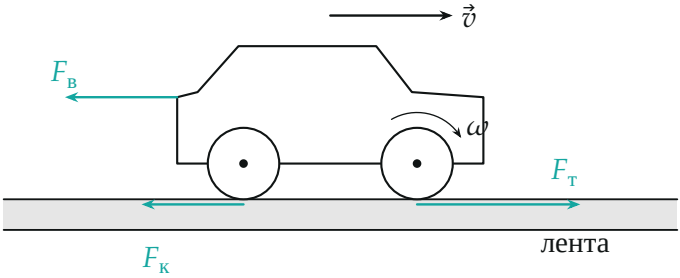

Рис. 1. Поясняющий рисунок: горизонтальные силы на автомобиль. Лента толкает ведущие колёса вперёд силой трения покоя $F_т$, назад действуют сопротивление воздуха $F_в$ и трение качения $F_к$.

1. Баланс сил и мощность. Скорость постоянна, поэтому по второму закону Ньютона в проекции на направление движения (в системе земли или ленты — обе инерциальны, лента движется равномерно)

$$F_т = F_в + F_к.$$

Двигатель создаёт на колёсах момент M, который уравновешивает момент силы трения $F_т$ относительно оси: $M = F_т r$. Мощность двигателя — момент, умноженный на угловую скорость колёс, а колёса катятся по ленте без проскальзывания, $\omega r = v_л$:

$$P = M\omega = F_т v_л = \left(k w^2 + F_к\right) v_л.$$

Это главная формула задачи: в силу сопротивления входит скорость относительно *воздуха*, а множителем стоит скорость относительно *ленты*.

2. Исходный режим: найдём k и $F_к$. Лента стоит, ветра нет: $w = v_л = v_0$. Половина мощности уходит на воздух, половина — на качение:

$$kv_0^2 \cdot v_0 = \frac{P}{2}, \qquad F_к v_0 = \frac{P}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{2v_0^3}, \qquad F_к = \frac{P}{2v_0}.$$

Пункт 1. Встречный ветер, лента стоит. Воздух летит навстречу со скоростью v_0, автомобиль едет вперёд со скоростью v_1, поэтому относительно воздуха $w = v_1 + v_0$; относительно ленты $v_л = v_1$ (рис. 2, а).

Мощность та же:

$$P = \left(\frac{P}{2v_0^3}(v_1 + v_0)^2 + \frac{P}{2v_0} \right) v_1.$$

Делим на $P/2$ и вводим $x = v_1/v_0$:

$$2 = \big((x+1)^2 + 1\big)\, x \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2x^2 + 2x - 2 = 0.$$

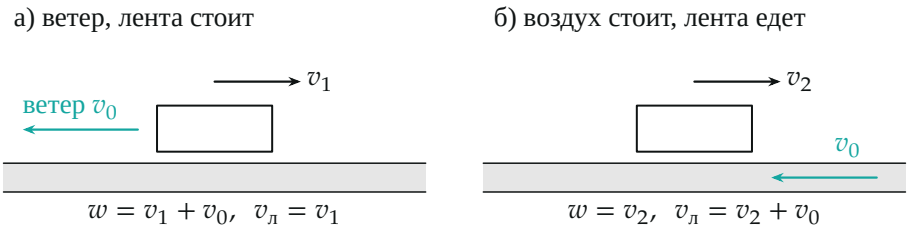

Рис. 2. Скорости относительно земли в двух режимах и скорости автомобиля относительно воздуха (w) и относительно ленты ($v_л$).

Подбор корня. Левая часть $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 2$ растёт при $x > 0$, поэтому положительный корень один. $f(0{,}5) = -0{,}375$, $f(0{,}6) = +0{,}136$ — корень между ними; дальше $f(0{,}57) = -0{,}025$, $f(0{,}58) = +0{,}028$, $f(0{,}575) \approx 0{,}001$:

$$x \approx 0{,}575, \qquad v_1 \approx 0{,}575\, v_0 \approx 11{,}5 \text{ м/с}.$$

Пункт 2. Ветра нет, лента едет назад. Воздух покоится относительно земли, поэтому $w = v_2$. Лента движется назад со скоростью v_0, автомобиль вперёд со скоростью v_2, и относительно ленты он едет со скоростью $v_л = v_2 + v_0$ (рис. 2, б) — колёса крутятся быстрее, чем автомобиль едет относительно земли:

$$P = \left(\frac{P}{2v_0^3} v_2^2 + \frac{P}{2v_0} \right) (v_2 + v_0).$$

С $y = v_2/v_0$:

$$2 = (y^2 + 1)(y + 1) \quad \Rightarrow \quad y^3 + y^2 + y - 1 = 0.$$

Подбор: $f(0{,}5) = -0{,}125, f(0{,}6) = +0{,}176, f(0{,}54) = -0{,}011, f(0{,}55) = +0{,}019, f(0{,}544) \approx 0{,}001$:

$$y \approx 0{,}544, \qquad v_2 \approx 0{,}544\, v_0 \approx 10{,}9 \text{ м/с}.$$

3. Графическая проверка. Мощность, нужная для движения со скоростью xv_0, в долях P: в пункте 1 $\frac{x((x+1)^2+1)}{2}$, в пункте 2 $\frac{(x^2+1)(x+1)}{2}$. Установившаяся скорость — там, где эта кривая пересекает уровень 1 (рис. 3).

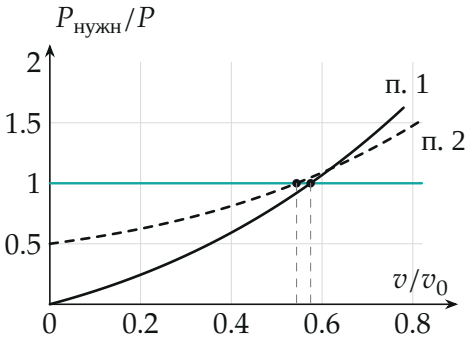

Рис. 3. Нужная для движения мощность в долях P: сплошная линия — пункт 1 (встречный ветер), пунктир — пункт 2 (лента едет назад). Пересечения с уровнем 1*:* 0,575 *и* 0,544.

Обратите внимание: во втором пункте ошибочно подставлять в мощность скорость относительно земли. Двигатель «не знает», куда движется земля: он вращает колёса, а колёса катятся по ленте, поэтому множитель — $v_2 + v_0$.

Проверка. Размерность: $k = P/(2v_0^3)$ в Н·с^2/м^2, kw^2 — в ньютонах. Знаки и смысл: в обоих случаях скорость меньше v_0 — в пункте 1 сопротивление воздуха выросло ($w = 31{,}5$ м/с против 20), в пункте 2 колёса крутятся на 30,9 м/с относительно ленты. Подстановка: $0{,}575 \cdot (1{,}575^2 + 1)/2 = 1{,}000$; $(0{,}544^2 + 1) \cdot 1{,}544/2 = 1{,}000$.

Одна и та же мощность распределяется по двум «счётчикам скорости»: сопротивление считает скорость относительно воздуха, двигатель — относительно ленты.

Ответ. 1) $v_1 = xv_0$, $x^3 + 2x^2 + 2x - 2 = 0$, $v_1 \approx 0{,}575\,v_0 \approx 11{,}5$ м/с; 2) $v_2 = yv_0$, $y^3 + y^2 + y - 1 = 0$, $v_2 \approx 0{,}544\,v_0 \approx 10{,}9$ м/с.