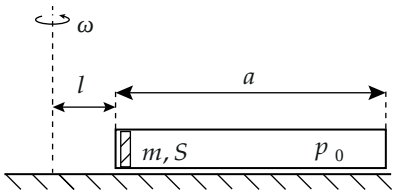
Трубка на центрифуге

Задача 3. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 3] «Трубка на центрифуге».

На центрифуге, которая может вращаться только вокруг вертикальной оси, закреплён в горизонтальном положении герметичный лёгкий цилиндр. Ось цилиндра проходит через ось вращения. Внутри цилиндра находится тонкий поршень, который может перемещаться без трения. Цилиндр заполнен идеальным газом, давлением которого поршень прижат к торцу цилиндра, ближнему к оси вращения. Длина цилиндра равна $a = 0{,}5$ м, площадь поршня $S = 5$ см^2, его масса $m = 10$ г, давление газа в цилиндре $p_0 = 1{,}0$ кПа. Расстояние от оси вращения до ближнего торца цилиндра $l = 0{,}1$ м. Центрифуга начинает вращаться, причём угловая скорость вращения ω очень медленно увеличивается. Температура газа поддерживается постоянной.



1. При каком значении ω_1 угловой скорости начальное положение равновесия поршня перестанет быть устойчивым?
2. На каком расстоянии x_1 от начального положения установится поршень при неизменной угловой скорости ω_1?
3. Теперь частоту вращения начали медленно уменьшать. При каком значении ω_2 поршень вернётся в исходное положение?

Примечание: считайте, что в ходе эксперимента воздух остаётся однородным.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие тела во вращающейся системе и его устойчивость. Поршень вращается по окружности, и центростремительное ускорение ему сообщает сила давления газа, направленная к оси. Пока ω мала, газ «перебарщивает» и прижимает поршень к ближнему торцу, лишнее гасит стенка. Когда стенка перестаёт

быть нужна, поршень отходит от оси; газ при этом сжимается (изотермически), его сила растёт быстрее, чем нужная центростремительная сила, и где-то находится новое равновесие. При уменьшении ω поршень возвращается не при ω_1, а позже — получается гистерезис.

Обозначения. x — смещение поршня от ближнего торца, поршень вращается по окружности радиуса $l + x$; p — давление газа, газ занимает объём $S(a-x)$ между поршнем и дальним торцом; N — сила реакции ближнего торца; $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{p_0 S}{ml}}$ — обозначение, смысл которого выяснится в пункте 1. Работаем в системе отсчёта земли (инерциальной), ось Ox — вдоль цилиндра от оси вращения.

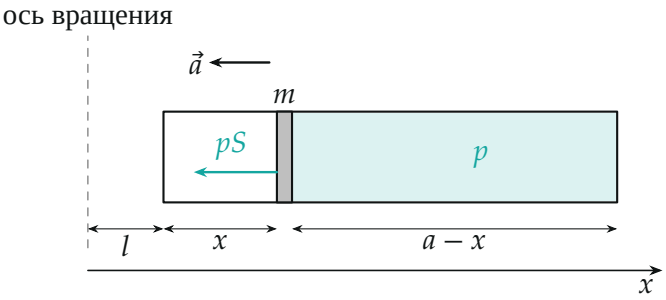


Рис. 1. Поршень, отошедший от торца на x. Горизонтально на него действует только сила давления газа pS (бирюзовая) — она и сообщает центростремительное ускорение $a = \omega^2(l+x)$, направленное к оси. Слева от поршня газа нет.

Пункт 1. Когда поршень отрывается.

1. Поршень у торца. Поршень движется по окружности радиуса l, ускорение $\omega^2 l$ направлено к оси. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось x (к оси — минус): газ толкает к оси силой $p_0 S$, торец — от оси силой N:

$$-m\omega^2 l = N - p_0 S \quad \Rightarrow \quad N = p_0 S - m\omega^2 l.$$

С ростом ω сила N убывает. Поршень остаётся у торца, пока $N \geq 0$;

при $N = 0$ он перестаёт держаться за стенку:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p_0 S}{ml}} = \sqrt{\frac{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{10^{-2} \cdot 0{,}1}}\ \text{с}^{-1} \approx 22{,}4\ \text{с}^{-1}.$$

2. Равновесие вдали от торца. Пусть поршень сместился на x. Газ изотермический (закон Бойля–Мариотта): $p\,S(a-x) = p_0 Sa$, $p = \dfrac{p_0 a}{a-x}$. Стенка уже не касается поршня, и второй закон Ньютона даёт

$$m\omega^2(l+x) = \frac{p_0 Sa}{a-x}.$$

Слева — сила, нужная для движения по окружности радиуса $l+x$; справа — сила, которую даёт газ. Подставив $p_0 S = m\omega_1^2 l$ и раскрыв скобки, получим квадратное уравнение для положения равновесия:

$$x^2 - (a-l)\,x + al\left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1\right) = 0.$$

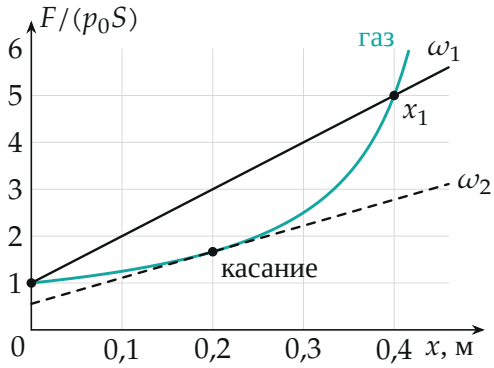


Рис. 2. Сила давления газа $\frac{p_0 Sa}{a-x}$ (бирюзовая) и нужная центростремительная сила $m\omega^2(l+x)$ при ω_1 (сплошная прямая) и ω_2 (пунктир). Равновесия — точки пересечения. При ω_1 это $x = 0$ и $x_1 = 0{,}4$ м, при ω_2 прямая касается кривой в точке $x = 0{,}2$ м.

Пункт 2. Куда уходит поршень. При $\omega = \omega_1$ свободный член уравнения равен нулю: $x(x-(a-l))=0$, корни $x=0$ и $x_1 = a-l$.

Устойчивость решаем по рис. 2. При $0 < x < a-l$ произведение $(l+x)(a-x) > la$, то есть $m\omega_1^2(l+x) > \dfrac{p_0 Sa}{a-x}$: прямая выше кривой, газа не хватает, чтобы удержать поршень на окружности, и поршень уходит дальше от оси. Значит, равновесие $x=0$ неустойчиво: малейшее смещение растёт. Около x_1 всё наоборот: правее x_1 кривая выше прямой (газ толкает к оси), левее — ниже (поршень уходит от оси), поршень возвращается. Он установится в

$$x_1 = a - l = 0{,}4 \text{ м}.$$

Газ при этом сжат в $\frac{a}{a-x_1} = 5$ раз.

Пункт 3. Возвращение. Уменьшаем ω: прямая на рис. 2 поворачивается вниз вокруг точки $x=-l$, свободный член уравнения становится положительным, и два корня

$$x_\pm = \frac{(a-l) \pm \sqrt{(a-l)^2 - 4al\left(\dfrac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1\right)}}{2}$$

сближаются. Поршень сидит на устойчивом x_+ (правое пересечение). Когда корни сливаются, прямая касается кривой, и при дальнейшем уменьшении ω пересечений нет: прямая везде ниже кривой, газ толкает поршень к оси, и он возвращается к торцу. Условие касания — нулевой дискриминант:

$$(a-l)^2 = 4al\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{(a+l)^2}{4al},$$

$$\omega_2 = \frac{2\sqrt{al}}{a+l}\,\omega_1 = \frac{2\sqrt{0{,}05}}{0{,}6} \cdot 22{,}4 \text{ с}^{-1} \approx 16{,}7 \text{ с}^{-1}.$$

Перед возвратом поршень стоит в точке касания $x = \frac{a-l}{2} = 0{,}2$ м.

Вся картина. Из уравнения шага 2 положение равновесия задаёт уг-

ловую скорость явно: $\omega = \omega_1\sqrt{\dfrac{al}{(l+x)(a-x)}}$. По этой формуле построен рис. 3: при разгоне поршень стоит у торца до ω_1, затем прыгает на x_1; при торможении едет по верхней ветви до ω_2 и прыгает обратно.

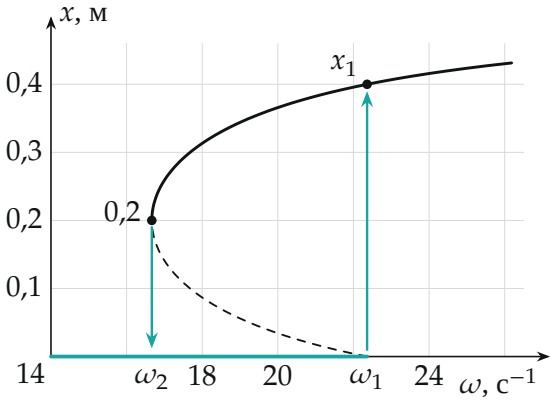


Рис. 3. Положение поршня при разгоне и торможении. Сплошная линия — устойчивые равновесия x_+, пунктир — неустойчивые x_-, бирюзовые стрелки — скачки поршня при ω_1 (от торца) и ω_2 (к торцу).

Обратите внимание: в интервале $\omega_2 < \omega < \omega_1$ поршень может стоять в двух местах — у торца или в x_+, и где он стоит, зависит от истории. Поэтому при торможении он не возвращается при ω_1.

Проверка. Размерность: $\frac{p_0S}{ml} \to \frac{\text{Н}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{с}^{-2}$. Подстановка в пункте 2: $m\omega_1^2(l+x_1) = \frac{p_0S}{l}\cdot 0{,}5 = 5p_0S$ и $\frac{p_0Sa}{a-x_1} = 5p_0S$ — совпадают. В пункте 3: при $x = 0{,}2$ м $m\omega_2^2\cdot 0{,}3 = \frac{5}{9}\cdot\frac{p_0S}{0{,}1}\cdot 0{,}3 = \frac{5}{3}p_0S$ и $\frac{p_0S\cdot 0{,}5}{0{,}3} = \frac{5}{3}p_0S$. Предел: при $l \to a$ получаем $\omega_2 \to \omega_1$ — гистерезис исчезает, как и должно, ведь тогда $x_1 = a - l \to 0$. Всегда $\omega_2 < \omega_1$, так как $2\sqrt{al} < a + l$.

Изотермический газ — «пружина» с жёсткостью, растущей при сжатии, поэтому вращающийся поршень имеет два устойчивых состояния и помнит, с какой стороны пришла угловая скорость.

Ответ. 1) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{p_0S}{ml}} \approx 22{,}4\ \text{с}^{-1}$; 2) $x_1 = a - l = 0{,}4$ м; 3) $\omega_2 = \dfrac{2\sqrt{al}}{a+l}\omega_1 \approx 16{,}7\ \text{с}^{-1}$.