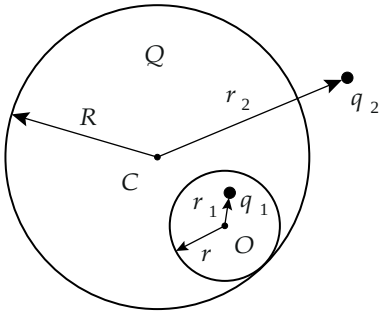
Заряженный шар (классика)

Задача 4. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 4] «Заряженный шар (классика)».

Проводящий шар радиусом R имеет сферическую полость радиусом r, касающуюся наружной поверхности шара. Заряд шара равен Q. В полости, на расстоянии r_1 от её центра, находится точечный заряд q_1. Вне шара, на расстоянии r_2 от его центра, находится точечный заряд q_2. Потенциал бесконечно удалённых точек примите равным нулю.



1. Найдите потенциал $\varphi_{\text{ш}}$ шара.
2. Найдите потенциал φ_O в центре O полости.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на проводник в электростатике и принцип суперпозиции. Внутри металла поля нет, весь шар — одна эквипотенциаль. Заряды на нём расположатся сложно (неравномерно: их тянет q_1 изнутри и q_2 снаружи), но для потенциала *в центре сферы* распределение не нужно: все заряды сферы находятся от центра на одном расстоянии. Поэтому потенциал шара считаем в точке C, а потенциал в полости — в её центре O.

Обозначения. $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; C — центр шара, O — центр полости; $q_{\text{п}}$ — заряд стенки полости, $q_{\text{н}}$ — заряд наружной поверхности шара; A — любая точка стенки полости.

1. Заряд стенки полости — теорема Гаусса. Проведём внутри металла замкнутую поверхность, окружающую полость (рис. 1, пунктир;

в точке касания полости и наружной сферы она подходит к краю шара сколь угодно близко — поле в металле равно нулю и там). Во всех её точках $\vec{E} = 0$, поток через неё равен нулю, значит, суммарный заряд внутри неё равен нулю:

$$q_1 + q_\text{п} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_\text{п} = -q_1.$$

Внутри металла объёмного заряда нет, весь заряд шара Q — на двух поверхностях, поэтому

$$q_\text{н} = Q - q_\text{п} = Q + q_1.$$

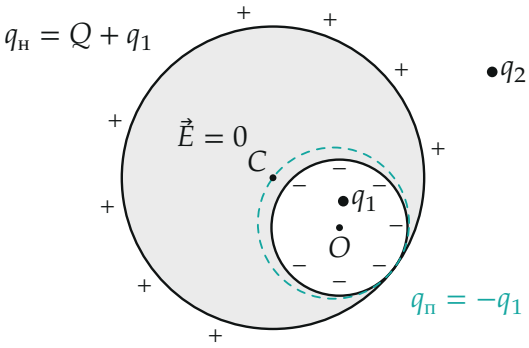


Рис. 1. Металл (серый) и замкнутая поверхность Гаусса в нём (бирюзовый пунктир). На стенке полости — заряд $-q_1$ (знаки «−», гуще у q_1), на наружной поверхности — $Q + q_1$ (знаки «+» при $Q + q_1 > 0$), распределённый неравномерно из-за q_2.

2. Две группы зарядов. Разобьём все заряды на две группы (рис. 2):

- *внутренняя*: q_1 и заряд $-q_1$ стенки полости;
- *внешняя*: заряд $Q + q_1$ наружной поверхности и q_2.

Заряд стенки полости распределяется так, чтобы вместе с q_1 погасить поле в металле. Такая система с нулевым суммарным зарядом не создаёт поля нигде вне полости (её поле снаружи полости — то же, что у сплошного незаряженного металла), и её потенциал вне полости равен нулю, как на бесконечности. Значит, поле в металле равно нулю и у

внешней группы. Внутри наружной сферы у внешней группы зарядов нет, и её потенциал во всём шаре, *включая полость*, один и тот же — это и есть $\varphi_ш$.

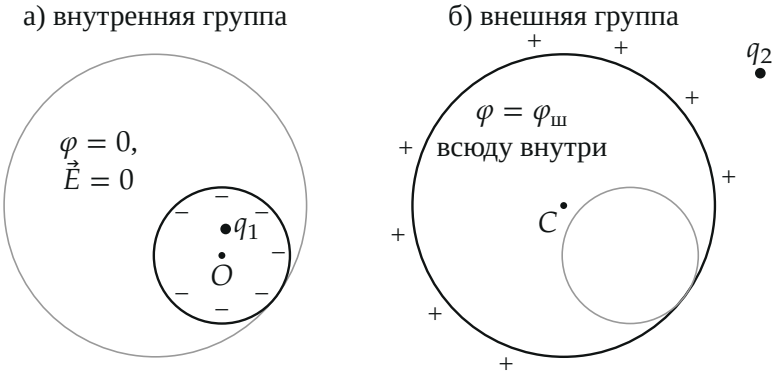


Рис. 2. Суперпозиция. а) q_1 и заряд стенки полости создают поле только внутри полости, вне её их потенциал равен нулю. б) Наружная поверхность и q_2 создают внутри наружной сферы постоянный потенциал $\varphi_ш$, в том числе в полости.

Пункт 1. Потенциал шара. Шар — эквипотенциаль, поэтому его потенциал — это потенциал внешней группы в любой точке внутри наружной сферы. Возьмём центр C (рис. 2, б). Каждый элемент заряда наружной поверхности, как бы он ни был распределён, находится от C на расстоянии R; заряд q_2 — на расстоянии r_2. По принципу суперпозиции потенциалов точечных зарядов

$$\varphi_ш = \frac{k(Q+q_1)}{R} + \frac{kq_2}{r_2} = k\left(\frac{Q+q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2}\right).$$

Пункт 2. Потенциал в центре полости. В точке O складываются потенциалы двух групп. Внешняя даёт $\varphi_ш$ (шаг 2). Внутренняя: заряд q_1 на расстоянии r_1 даёт $\frac{kq_1}{r_1}$, а весь заряд $-q_1$ стенки находится от центра

O на расстоянии r — снова распределение не важно, вклад $-\frac{kq_1}{r}$ (рис. 3):

$$\varphi_O = \varphi_{\text{ш}} + \frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r} = \\ = k\left(\frac{Q+q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} + q_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\right).$$

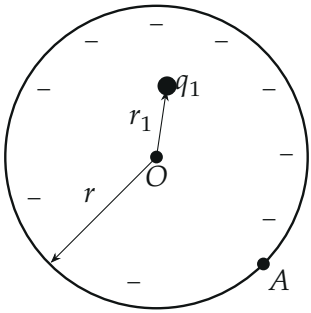


Рис. 3. Вклад внутренней группы в потенциал точки O: заряд q_1 на расстоянии r_1, весь заряд $-q_1$ стенки — на расстоянии r.

Второй способ (через стенку полости). Точка A стенки принадлежит проводнику: $\varphi_A = \varphi_{\text{ш}}$. Внутренняя группа в точке A даёт ноль (шаг 2), в точке O — $\frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r}$; внешняя в обеих точках одинакова. Поэтому $\varphi_O - \varphi_A = kq_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$ — тот же ответ.

Обратите внимание: заряд q_1 влияет на потенциал шара, хотя спрятан в полости, — через заряд $Q + q_1$ наружной поверхности. А его положение в полости (r_1) на $\varphi_{\text{ш}}$ не влияет: металл экранирует только поле, но не заряд.

Проверка. Размерность: каждое слагаемое — $k \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$, вольты. Предельные случаи: при $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ получаем $\varphi_O = \varphi_{\text{ш}} = \frac{kQ}{R}$ — уединённый заряженный шар, полость с пустотой ничего не меняет. При $r_1 < r$ и $q_1 > 0$ имеем $\varphi_O > \varphi_{\text{ш}}$: силовые линии от q_1 идут к стенке, потенциал вдоль них убывает.

Ответ. $\left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$ 1) $\varphi_{\text{ш}} = k\left(\frac{Q+q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2}\right)$; 2)

$$\varphi_O = k\left(\frac{Q+q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} + q_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\right).$$