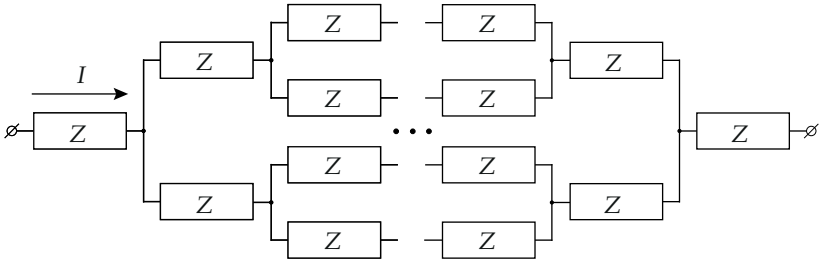
Нелинейность

Задача 5. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 5] «Нелинейность».

Нелинейный элемент Z имеет вольт-амперную характеристику $I_Z = \alpha U_Z^2$, где $\alpha = 0{,}07$ А/В^2. Получите формулу зависимости силы тока I от напряжения в цепи, составленной из бесконечного числа нелинейных элементов Z (см. рисунок).



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на бесконечную цепь из нелинейных элементов. Для нелинейного элемента нет «сопротивления», которое можно сложить по правилам последовательного и параллельного соединения: напряжение на нём зависит от тока как $U_Z = \sqrt{I_Z/\alpha}$. Зато цепь симметрична, и токи во всех элементах известны сразу: в каждом узле ток делится пополам. Зная токи, находим напряжения на элементах и складываем их вдоль пути от входа к выходу — получится бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Обозначения. I — ток, входящий в цепь, U — напряжение на цепи; уровни элементов нумеруем от входа: уровень k — элементы после $(k-1)$-го разветвления; I_k, U_k — ток через элемент k-го уровня и напряжение на нём.

1. Токи в элементах. После первого элемента цепь разветвляется на две одинаковые половины; одинаковые ветви между одними и теми же узлами при одинаковом напряжении пропускают одинаковый ток, поэтому ток делится поровну: $I/2$. Каждая половина снова делится на две одинаковые части — $I/4$, и так далее (рис. 1). Справа ветви сходятся

симметрично, и токи складываются в обратном порядке:

$$I_k = \frac{I}{2^{k-1}}.$$

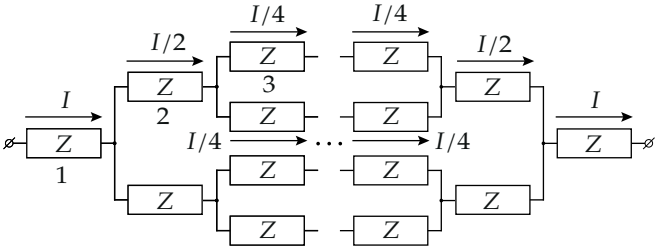


Рис. 1. Токи в элементах. Цифры 1, 2, 3 *— номера уровней: на каждом следующем уровне ток вдвое меньше.*

2. Напряжения на элементах. Из вольт-амперной характеристики $U_Z = \sqrt{I_Z/\alpha}$:

$$U_1 = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}, \qquad U_2 = \sqrt{\frac{I}{2\alpha}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}, \qquad U_3 = \sqrt{\frac{I}{4\alpha}} = \frac{U_1}{2},$$

$$U_k = \frac{U_1}{(\sqrt{2})^{k-1}}.$$

Напряжения убывают в $\sqrt{2}$ раз на уровень, а не в 2 раза, как токи: у элемента Z напряжение растёт как корень из тока (рис. 2).

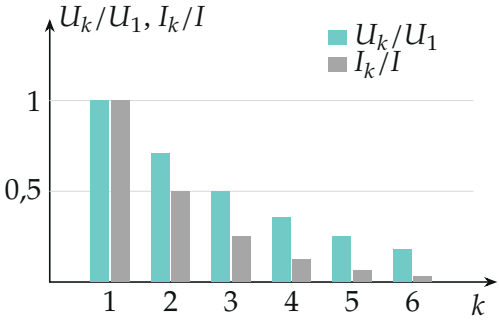


Рис. 2. Ток (серые столбики) убывает вдвое на каждом уровне, напряжение (бирюзовые) — в $\sqrt{2}$ раз. Поэтому ряд напряжений сходится медленнее.

3. Напряжение на всей цепи. Пройдём от входа к выходу по любому пути — например, по верхним ветвям. До середины цепи он проходит по одному элементу каждого уровня $1, 2, 3, \dots$, после середины — снова по одному элементу каждого уровня, в обратном порядке. По второму правилу Кирхгофа (напряжения на последовательных участках пути складываются)

$$U = 2\,(U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = 2U_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots\right).$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}.$$

Значит,

$$U = 2\,(2 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{I}{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\alpha}{4(2 + \sqrt{2})^2}\,U^2 = \frac{\alpha(\sqrt{2} - 1)^2}{8}\,U^2.$$

(Мы воспользовались $\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$.)

4. Численно.

$$I = \gamma U^2, \qquad \gamma = \frac{\alpha(\sqrt{2} - 1)^2}{8} = \frac{0{,}07 \cdot 0{,}1716}{8}\,\frac{\text{А}}{\text{В}^2},$$

$$\gamma \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{А}}{\text{В}^2} = 1{,}5\,\frac{\text{мА}}{\text{В}^2}.$$

Вся цепь ведёт себя как один нелинейный элемент того же вида, только в $\frac{8}{(\sqrt{2}-1)^2} \approx 47$ раз «слабее».

Второй способ — самоподобие. Посмотрим на цепь от первого раз-

ветвления до последнего узла слияния: каждая из двух ветвей — это снова элемент Z, разветвление, …, слияние, элемент Z, то есть копия всей цепи (рис. 3). Если вся цепь подчиняется закону $I = \gamma U^2$, то

$$W = Z + (W \parallel W) + Z.$$

Ток I проходит через два крайних элемента (напряжение по $\sqrt{I/\alpha}$), а через каждую из копий — ток $I/2$ (напряжение $\sqrt{I/(2\gamma)}$):

$$\sqrt{\frac{I}{\gamma}} = 2\sqrt{\frac{I}{\alpha}} + \sqrt{\frac{I}{2\gamma}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\alpha(\sqrt{2}-1)^2}{8}.$$

Тот же ответ.

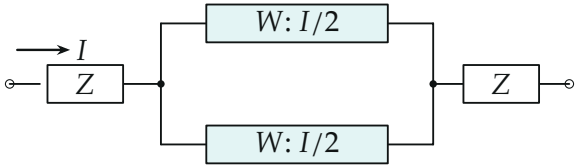


Рис. 3. Самоподобие: между двумя крайними элементами Z стоят две копии W всей бесконечной цепи, по каждой течёт ток $I/2$.

Обратите внимание: удвоение суммы в шаге 3 — это не «две половины цепи параллельно», а последовательный путь: от входа до середины и от середины до выхода. Параллельные ветви учтены тем, что ток в них делится.

Проверка. Размерность: γ — в А/В^2, как и α. Самосогласованность: при $U = 10$ В по формуле $I = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0{,}150$ А; тогда $U_1 = \sqrt{0{,}150/0{,}07} = 1{,}464$ В и $U = 2 \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot 1{,}464 = 10{,}0$ В. Частичная сумма ряда после 10 уровней — 3,30 из 3,41, так что бесконечная цепь действительно близка к реальной цепи с конечным числом уровней.

Ответ. $I = \gamma U^2$, где $\gamma = \dfrac{\alpha(\sqrt{2}-1)^2}{8} \approx 1{,}5$ мА/В^2.