Температура Кюри

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Температура Кюри».

Атомы и молекулы веществ, относящихся к парамагнетикам и к ферромагнетикам, имеют собственные магнитные моменты. При низких температурах в ферромагнетиках за счёт взаимодействия соседних атомов возникают области объёма, называемые доменами, в которых магнитные моменты атомов одинаково направлены. Если в предмете из ферромагнитного вещества большая часть доменов имеет примерно одинаковое направление намагниченности, вокруг таких предметов возникает сильное магнитное поле. Это постоянные магниты. При повышении температуры тепловое движение разрушает упорядоченность магнитных моментов, и ферромагнетик превращается в парамагнетик. В парамагнетиках домены отсутствуют, моменты атомов ведут себя независимо друг от друга. Температура, соответствующая этому переходу, называется температурой Кюри. Магнит, нагретый до температуры Кюри, необратимо теряет свои свойства. Выше температуры Кюри ферромагнетик находится в парамагнитном состоянии и может проявлять магнитные свойства только во внешнем магнитном поле.

Значение магнитного момента p_m парамагнитного образца определяется формулой $p_m = \chi V B$, где χ — магнитная восприимчивость, V — объём образца, B — величина внешнего магнитного поля. Магнитная восприимчивость зависит от абсолютной температуры T в соответствии с законом Кюри–Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c},$$

где T_c — температура Кюри. Когда парамагнитный образец находится в неоднородном внешнем поле, на него действует сила, втягивающая его в область более сильного поля. Величина этой силы пропорциональна магнитному моменту p_m.

Часть 1. Температура Кюри неодимового магнита. При достижении температуры Кюри T_c постоянный магнит размагничивается. Ваша задача по возможности точно определить температуру Кюри.

1. Продумайте и подробно опишите метод измерений, по возможности сопроводив описание рисунком.
2. Проведите измерения, используя выданные вам маленькие неодимовые магниты.
3. Оцените погрешность определения T_c маленьких неодимовых магнитов.

Оборудование для части 1: 1) 10 маленьких неодимовых магнитов; 2) свеча; 3) перчатка; 4) мультиметр с термопарой; 5) кусок алюминиевой фольги; 6) зажим «крокодил» из стали. Внимание! Вам запрещается самостоятельно не только зажигать, но и тушить свечу. Это могут делать только дежурные по аудитории. Внимание! Не помещайте спай термопары непосредственно в пламя свечи! Новые термопары не выдаются.

Подсказка. Надёжные показания термопары могут быть получены лишь при обеспечении её хорошего теплового контакта с предметом, температура которого измеряется.

Часть 2. Температура Кюри гадолиния. При температуре ниже температуры T_c гадолиний является ферромагнетиком, при $T > T_c$ это парамагнетик. Вам предлагается исследовать зависимость магнитной восприимчивости гадолиния от температуры вблизи точки Кюри.

4. Исследуйте зависимость магнитной восприимчивости χ гадолиния (в условных единицах) от температуры в диапазоне от комнатной температуры до 50 °C. В каком диапазоне температур выполняется закон Кюри–Вейса?
5. Определите, используя полученные вами результаты, температуру Кюри для гадолиния.
6. Определите погрешность измерения T_c.

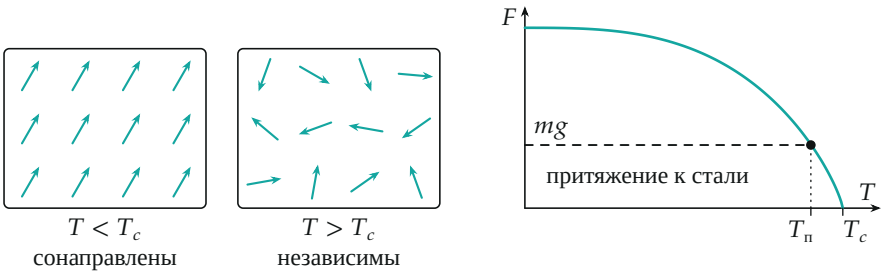
Оборудование для части 2: 1) большой цилиндрический магнит на деревянной подставке (нагревать его запрещается); 2) образец гадолиния; 3) весы (чтобы весы не отключались, каждые 20 секунд нажимайте на кнопку Light); 4) подставка из немагнитного металла с отверстием; 5) горячая и холодная вода (по требованию), ёмкость для воды; 6) мультиметр с термопарой; 7) прищепка; 8) миллиметровка.

▲ **Решение. Что происходит.** В обеих частях ищем температуру, при которой исчезает ферромагнетизм, но подступаемся по-разному. В части 1 магнит ферромагнитен, пока холоден, и притянут к стальному крокодилу; при T_c порядок моментов разрушается, притяжение пропадает, магнит падает, и температура в момент падения есть T_c. Гадолиний в части 2 нагрет выше T_c и парамагнитен, падать нечему, и T_c находим по закону Кюри–Вейса: сила на образец пропорциональна χ, а $\chi \propto 1/(T - T_c)$ растёт при приближении к T_c сверху. Класс задачи — экспериментальный: метод, измерения, обработка, погрешность; в части 2 ещё линеаризация — подбираем координаты, в которых закон станет прямой, а T_c прочитается на оси.

Обозначения. Часть 1: T_i — показание термопары при падении магнита в i-м опыте, N — число опытов. Часть 2: T — температура воды у образца, m — модуль показания весов. Температуры в °C: в закон входит разность $T - T_c$.

Часть 1. Температура Кюри неодимового магнита.

Пункт 1. Метод измерения. Сталь крокодила во внешнем поле намагничивается, и магнит притягивает её, пока сам намагничен; сила притяжения растёт с намагниченностью. При нагреве намагниченность падает, и когда притяжение становится меньше mg, магнит отрывается (рисунок ниже: домены и схематичный ход силы).



Слева — домены: ниже T_c моменты сонаправлены, выше — независимы. Справа — схема (не измерение): сила притяжения F магнита к стали падает с температурой, магнит отрывается при $T_п$, где $F = mg$, чуть ниже T_c.

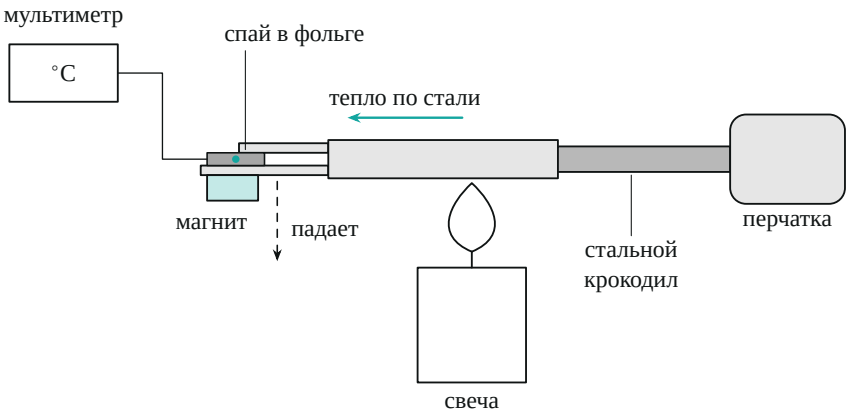
1. Обматываем спай термопары фольгой и зажимаем губками крокодила: фольга и сталь дают большую площадь контакта, и спай прини-

мает температуру металла, а не воздуха или пламени (в пламя спай, по условию, не кладём).

2. Крепим магнит к нижней стороне губок вплотную к спаю: он может свободно упасть, а спай показывает температуру металла прямо у магнита.

3. Греем крокодил свечой (её зажигает дежурный) с противоположного конца, не у магнита. Тепло идёт по стали, нагрев медленный, и температуры фольги, спая, стали и магнита успевают выровняться; при быстром нагреве термопара показывала бы не температуру магнита.

4. В момент падения записываем показание мультиметра T_i. Даём остыть и повторяем с другим магнитом (магнитов десять, нужно не меньше семи измерений). Упавший магнит подносим к стали: нет притяжения — значит, причина падения в потере намагниченности (магнит необратимо теряет свойства выше T_c), а не в соскальзывании.



Поясняющий рисунок к части 1 (в условии рисунка нет): установка опыта.

Обратите внимание: в момент падения притяжение сравнялось с mg, это не сама T_c, а чуть меньшая температура (вблизи T_c сила круто падает). Измеряем оценку T_c с небольшой систематической добавкой, которую по этим данным отдельно не определить.

Пункт 2. Измерения и обработка. Организаторы сделали по пять

опытов на трёх установках (температуры в °C):

	установка 1	установка 2	установка 3
опыт 1	245	270	247
опыт 2	260	250	255
опыт 3	250	246	240
опыт 4	252	255	254
опыт 5	258	260	262
$\overline{T}$	253,0	256,2	251,6
ΔT	2,7	4,2	3,7

Строки $\overline{T}$, ΔT у организаторов округлены: 253, 256, 252; 3, 4, 4. Лучшая оценка T_c — среднее арифметическое, случайная погрешность — погрешность среднего:

$$\overline{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i, \qquad \Delta T = \sqrt{\frac{\sum_i (T_i - \overline{T})^2}{N(N-1)}} = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

Здесь s — разброс одного опыта, а среднее из N опытов точнее в $\sqrt{N}$ раз. Три средних отличаются друг от друга не больше чем на 4,6 °C, это порядка погрешностей самих установок (2,7–4,2 °C), значит, установки согласуются и их можно объединить. Для всех пятнадцати опытов $\overline{T} = 253{,}6$ °C, $s = 7{,}7$ °C, $\Delta T = 7{,}7/\sqrt{15} \approx 2{,}0$ °C.

Пункт 3. Погрешность. Случайная: $\Delta T \approx 2$ °C (с вероятностью 95 % около 4 °C: коэффициент Стьюдента для 14 степеней свободы 2,1). Систематические: запаздывание термопары (пропорционально скорости нагрева — потому нагрев медленный), цена деления 1 °C и падение чуть ниже T_c; по этим опытам отдельно их не оценить.

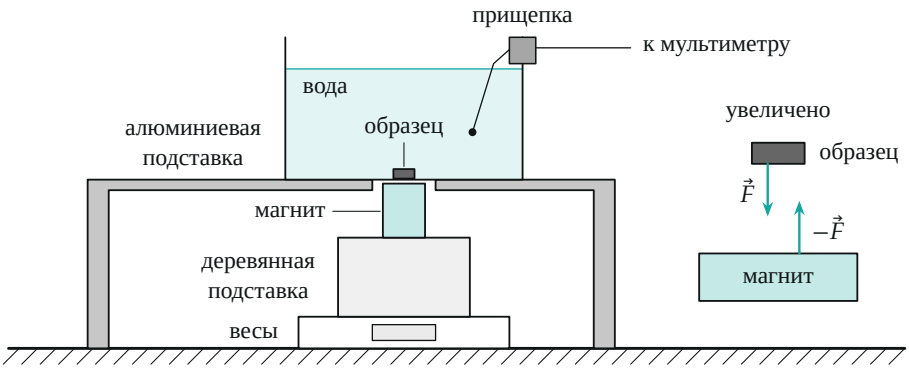
Ответ части 1: $T_c = (254 \pm 2)$ °C (≈ 527 K).

Часть 2. Температура Кюри гадолиния.

Пункт 4. Сила на образец пропорциональна χ. Гадолиний лежит над полюсом большого магнита, где поле неоднородно. По условию втягивающая сила пропорциональна магнитному моменту: $F = k p_m = k\chi V B$. Положение образца и объём V не меняются, магнит не греем (за-

прещено), значит $K = kVB$ от температуры не зависит: $F = K\chi$, и по закону Кюри–Вейса $F = KC/(T - T_c)$.

Силу измеряем весами: магнит на деревянной подставке стоит на весах, немагнитная алюминиевая подставка с отверстием опирается на стол, охватывает весы, магнит выступает в отверстие; на подставке сосуд с водой, на дне — образец.



Поясняющий рисунок к части 2: на весах магнит, над ним на алюминиевой подставке сосуд с образцом; справа — взаимодействие образца и магнита крупнее.

Образец притягивается к магниту с силой $\vec{F}$, по третьему закону Ньютона магнит притягивается к образцу с силой $-\vec{F}$. Вес образца, воды и сосуда несёт подставка на столе, на весы он не передаётся (потому и масса воды на показание не влияет). Весы чувствуют только $-\vec{F}$, и показание меняется на F/g (знак не важен — берём модуль m):

$$m = \frac{F}{g} = \frac{KC}{g} \cdot \frac{1}{T - T_c} = \frac{\beta}{T - T_c}, \qquad \beta = \frac{KC}{g} = \text{const}.$$

Пункт 5. Линеаризация. График $m(T)$ — гипербола с асимптотой $T = T_c$, прямо T_c по нему не прочитать. Выразим T:

$$\frac{1}{m} = \frac{T - T_c}{\beta} \quad \Longrightarrow \quad T = T_c + \beta \cdot \frac{1}{m}.$$

В координатах $(1/m,\ T)$ это прямая: свободный член — T_c (значение T при $1/m = 0$), наклон — β.

Измерение. Наливаем горячую воду ($\approx 50\,^\circ$C), термопара на прищепке у образца, добавляем холодную воду и через градус записываем T и m (не меньше семи пар; у нас 25). Значения m сняты с графика организаторов (точность около 0,02 г):

T, °C	25	26	27	28	29	30	31	32	33
m, г	4,88	4,37	3,88	3,48	3,27	2,98	2,72	2,58	2,34
T, °C	34	35	36	37	38	39	40	41	
m, г	2,21	2,01	1,90	1,81	1,71	1,63	1,49	1,42	
T, °C	42	43	44	45	46	47	48	49	
m, г	1,35	1,34	1,30	1,21	1,18	1,17	1,13	1,11	

Пункт 6. МНК и погрешность. Строим T от $x = 1/m$ и проводим $T = a + bx$. Формулы МНК для $n = 25$ точек:

$$b = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(T_i - \overline{T})}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}, \qquad a = \overline{T} - b\,\overline{x},$$

$$\Delta a = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}}, \qquad \Delta b = \frac{s}{\sqrt{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}},$$

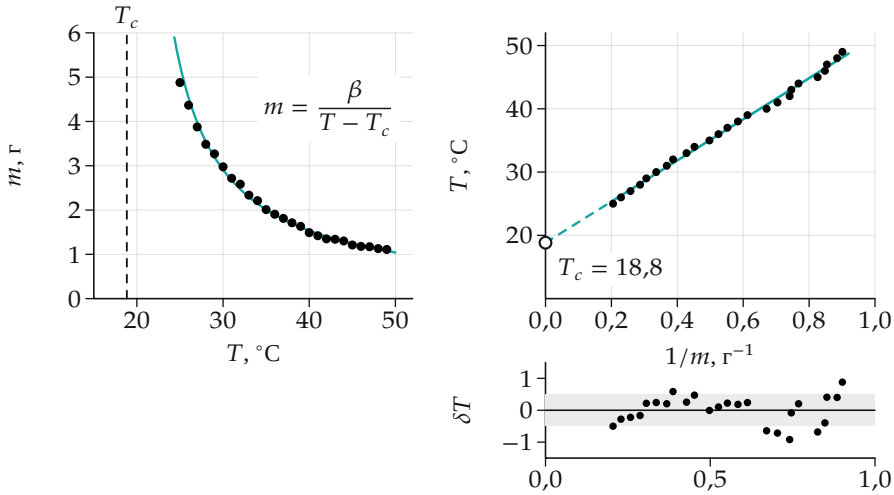
где $s = \sqrt{\sum_i (T_i - a - bx_i)^2/(n-2)}$. Для наших точек $\overline{x} = 0{,}559$ г$^{-1}$, $\overline{T} = 37{,}0\,^\circ$C, $\sum_i (x_i - \overline{x})^2 = 1{,}227$ г$^{-2}$, откуда

$$a = T_c = 18{,}84 \pm 0{,}25\,^\circ\text{C}, \qquad b = \beta = 32{,}5 \pm 0{,}4\,^\circ\text{C}\cdot\text{г}, \qquad s = 0{,}46\,^\circ\text{C}.$$

В каком диапазоне выполняется закон Кюри–Вейса. Во всём измеренном (рисунок ниже), от 25 до 49 °C ($T - T_c$ от 6 до 30 К): изгиба нет, отклонения от прямой в пределах $\pm 1\,^\circ$C и перемешаны по знаку, среднеквадратичное 0,46 °C — порядка цены деления мультиметра. Отдельно по нижней (25–36 °C) и верхней (37–49 °C) половинам получаем $T_c = 18{,}2 \pm 0{,}3$ и $18{,}2 \pm 1{,}1\,^\circ$C: половины согласуются друг с другом и

отличаются от общего значения на 0,6 °C.

Обратите внимание: погрешность МНК 0,25 °C учитывает лишь разброс точек около прямой; сдвиг по кускам диапазона (до 0,6 °C) говорит, что полная неопределённость ближе к $\pm 0{,}5$ °C.



Слева — измеренная зависимость $m(T)$ и кривая $m = \beta/(T - T_c)$ (штрих — асимптота $T = T_c$). Справа — те же точки в координатах $(1/m, T)$ с прямой МНК; штрих — продолжение до $1/m = 0$, там T_c. Внизу — отклонения δT точек от прямой; серая полоса $\pm 0{,}5$ °C — половина цены деления мультиметра.

Ответ части 2: закон выполняется во всём диапазоне 25–49 °C; $T_c = 18{,}8 \pm 0{,}3$ °C (МНК), с учётом кусков диапазона — $\pm 0{,}6$ °C.

Проверка. Единицы: β в °C · г, как и $m(T - T_c)$. Предел: при $T \to T_c$ показание $m \to \infty$ (эту область не исследуем). Подстановка: при 25 °C формула даёт $m = 32{,}5/(25 - 18{,}84) = 5{,}3$ г, измерено 4,9 г. Справочно: T_c гадолиния около 293 K, найдено 292 K; для чистой фазы $Nd_2Fe_{14}B$ около 585 K, у наших магнитов 527 K ниже (сплавные добавки и падение чуть ниже T_c). Смысл: исчезающий при T_c порядок ловят по самому исчезновению (падение магнита) или по расходящейся χ.

Ответ. Часть 1: нагрев стального крокодила свечой с дальнего конца, спай в фольге у магнита, температура в момент падения; $T_c = (254 \pm$

2) °C. Часть 2: $m = \beta/(T - T_c)$; закон выполняется во всём диапазоне 25–49 °C; $T_c = 18{,}8 \pm 0{,}3$ °C.