Двулучепреломление в скотче

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 2] «Двулучепреломление в скотче».

Электромагнитная волна называется плоскополяризованной, если вектор $\vec{E}$ совершает колебания в одной плоскости. Эта плоскость называется плоскостью поляризации, а направление, параллельно которому колеблется вектор $\vec{E}$, называется направлением поляризации. Естественный свет содержит все возможные направления поляризации. Поляризатор — это устройство, которое пропускает через себя свет только одного направления поляризации и поглощает волны с перпендикулярным направлением поляризации. Направление поляризации света, прошедшего через поляризатор, будем называть «разрешённым» направлением этого поляризатора.

Среди прозрачных оптических сред можно выделить изотропные среды, показатель преломления которых не зависит от направления поляризации световой волны, а также анизотропные, свойства которых различны для разных направлений поляризации света. В данной задаче мы будем исследовать такую анизотропную среду — плёнку «скотч».

Введём систему координат, указанную на рисунке. Обозначим символами n_x и n_y — показатели преломления для световой волны, идущей вдоль оси Oz и поляризованной вдоль осей Ox, Oy соответственно. Также обозначим $\Delta n = n_x - n_y$. Показатели преломления n_x и n_y изменяются при растяжении плёнки. В процессе производства после стадии кристаллизации из расплава плёнка является изотропной. После затвердевания плёнку растягивают сложным образом, поэтому у выданной вам плёнки $\Delta n < 0$.

Для изучения плёнки вы будете растягивать её вдоль оси Ox. Введём обозначение для относительного удлинения $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{x_{\text{нач}}}$.

Оборудование: 1) катушка плёнки «скотч»; 2) система для растяжения плёнки; 3) ножницы; 4) фломастер; 5) два поляризатора на подставках, закреплённые в держателях так, что их разрешённые направления образуют угол 45° с вертикалью; 6) лазерная указка на подставке; 7) линейка;

8) картон для зажима плёнки; 9) фотодиод и мультиметр; 10) миллиметровая бумага для построения графика.

1. Закрепите в установке полоску плёнки горизонтально, зажмите её как показано на рисунке. Вращая ручку установки, добейтесь того, чтобы плёнка полностью выпрямилась (не провисала). По разные стороны от полоски параллельно ей расположите два поляризатора. Их разрешённые направления должны быть взаимно перпендикулярны и составлять угол 45° с вертикалью. Растягивайте плёнку и наблюдайте (невооружённым глазом) сквозь два поляризатора и плёнку рассеянный белый свет. Растягивайте плёнку до $\varepsilon = 1$ и далее до разрыва. Опишите наблюдаемые эффекты (изменение цвета и интенсивности света, прошедшего через систему) в зависимости от удлинения ε плёнки.
2. Закрепите в установке новую полоску плёнки, как в пункте 1. Считая, что плотность плёнки при растяжении остаётся постоянной, исследуйте зависимость толщины d плёнки от относительного удлинения ε. Толщина выданной вам (нерастянутой) плёнки $d_0 = 25$ мкм. Проведите измерения для 5 различных значений ε. В следующих пунктах считайте толщину плёнки постоянной и равной d_0.
3. Соберите установку как указано в пункте 1. Закрепите в зажиме новую полоску плёнки. Направьте луч лазера сквозь плёнку и два поляризатора и измерьте зависимость интенсивности I прошедшего света (в условных единицах) от относительного удлинения ε плёнки. (Внимание!! Свет лазера поляризован). Для измерения интенсивности света используйте фотодиод, подключённый к мультиметру в режиме амперметра.
4. После прохождения электромагнитной волны через полоску плёнки между её составляющими, поляризованными вдоль осей Ox и Oy, возникает дополнительная разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi d\,\dfrac{\Delta n}{\lambda}$. При этом интенсивность прошедшего света равна $I = I_0 \sin^2 \dfrac{\Delta\varphi}{2}$. Зависимость, снятая в пункте 3, имеет несколько минимумов. Определите, какой из них соответствует $\Delta\varphi = 0$. Ответ обоснуйте.

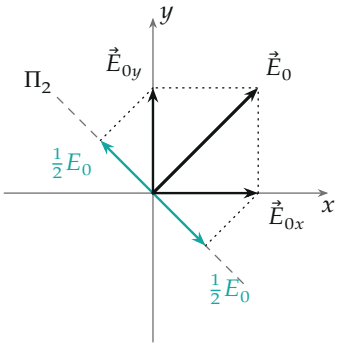
5. Используя полученные ранее данные, постройте график зависимости $\Delta n(\varepsilon)$. Считая, что разность показателей преломления Δn линейно зависит от удлинения плёнки ε: $\Delta n(\varepsilon) = A\varepsilon - B$, определите коэффициенты A и B.

Указания: 1) длина волны лазера $\lambda = 650$ нм; 2) считайте, что $|\Delta n| \ll 1$ при любой деформации плёнки; 3) сила тока, протекающего через амперметр, прямо пропорциональна мощности падающего на фотодиод света.

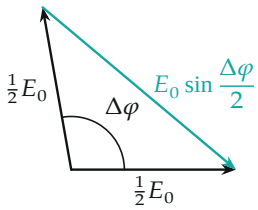
▲ **Решение. Что происходит.** При растяжении вдоль x плёнка становится анизотропной: n_x и n_y расходятся на Δn, между x- и y-составляющими волны набегает разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi d\,\Delta n/\lambda$, поляризация меняется, и второй поляризатор пропускает долю $\sin^2(\Delta\varphi/2)$. Измеряем интенсивность, а нужна фаза, и она определяется неоднозначно: у $\sin^2$ много корней. Поэтому сначала привязываем отсчёт (находим минимум, где $\Delta\varphi = 0$), затем на каждом участке берём нужную ветвь арксинуса, получаем $\Delta\varphi(\varepsilon)$, $\Delta n(\varepsilon)$ и прямую $A\varepsilon - B$. Класс задачи — экспериментальный: наблюдение, измерение, восстановление скрытой величины по интенсивности, линейная подгонка.

Обозначения. $\varepsilon = (L - L_0)/L_0$ — удлинение (L — расстояние между метками), h — ширина плёнки, d — толщина, $d_0 = 25$ мкм, I — интенсивность, нормированная на максимум, $\lambda = 650$ нм.

Откуда $I = I_0 \sin^2(\Delta\varphi/2)$. Направление Π_1 лежит под 45° к осям, поэтому волна после него состоит из x- и y-составляющих одинаковой амплитуды $E_0/\sqrt{2}$. Направление Π_2 перпендикулярно Π_1, и проекция каждой составляющей на него равна $E_0/2$, причём проекции направлены в противоположные стороны (рисунок). Плёнка сдвигает фазу одной составляющей на $\Delta\varphi$. При $\Delta\varphi = 0$ проекции гасят друг друга: свет не проходит ни на одной длине волны. В общем случае складываем два колебания амплитуды $E_0/2$ со сдвигом фаз $\Delta\varphi$ (диаграмма справа): амплитуда $E_0 \sin(\Delta\varphi/2)$, интенсивность $I_0 \sin^2(\Delta\varphi/2)$, $I_0 = E_0^2$ — интенсивность после Π_1.



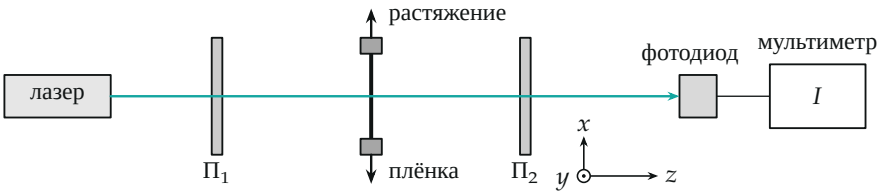
а) вид навстречу лучу



б) сложение проекций

Слева — вид навстречу лучу: $\vec{E}_0$ вдоль $П_1$ раскладывается на $\vec{E}_{0x}$ и $\vec{E}_{0y}$, их проекции на $П_2$ равны по модулю и противоположны по направлению. Справа — сложение колебаний двух проекций со сдвигом фаз $\Delta\varphi$ (показано 100°): результирующая амплитуда — разность двух векторов длины $\frac{1}{2}E_0$.

Пункт 1. Что видно глазом. Собираем установку как на рисунке: полоска плёнки горизонтально в растяжке, по обе стороны от неё $П_1$ и $П_2$ скрещены, оба под 45° к вертикали.



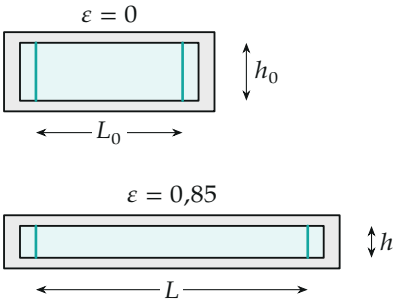
Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): ход луча лазера через $П_1$, плёнку, $П_2$ к фотодиоду; вид сверху, ось y направлена на нас.

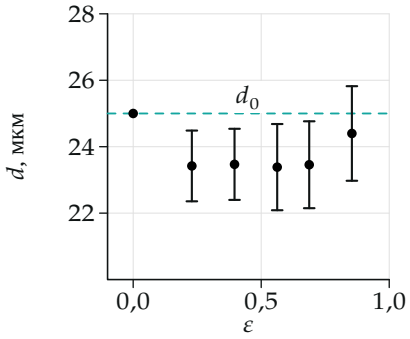
Растягивая плёнку, наблюдаем (по данным организаторов): нерастянутая плёнка выглядит светлой с жёлтым оттенком; при растяжении примерно в 1,5 раза ($\varepsilon \approx 0{,}5$) наступает минимум интенсивности: свет не проходит ни на одной длине волны; дальше интенсивность снова растёт и цвет меняется: жёлтый, красный, синий, зелёный.

Объяснение: белый свет — набор длин волн, и при одной разности хода $d\Delta n$ у каждой своя разность фаз $2\pi d\Delta n/\lambda$. Цвет гаснет, если $\Delta\varphi = 2\pi k$, то есть $d\Delta n = k\lambda$. При $\Delta n = 0$ ($k = 0$) это выполнено для всех длин

волн сразу — полная темнота; при $\Delta n \neq 0$ для разных цветов гашение наступает при разных растяжениях, и плёнка окрашивается в цвет, дополнительный к погашенному.

Пункт 2. Толщина плёнки. Плотность постоянна, значит, объём $L\,h\,d$ куска плёнки между метками не меняется: $L_0 h_0 d_0 = Lhd$, откуда $d = d_0 \dfrac{L_0 h_0}{Lh}$. Чтобы на результат не влияла область у зажима, фломастером рисуем две метки на плёнке и измеряем расстояние L между ними; ширину h измеряем в середине участка, где она однородна.





Слева — полоска до и после растяжения: метки (бирюзовые) на расстоянии L, ширина h. Справа — $d(\varepsilon)$ по таблице ниже; штрих — d_0.

Организаторы получили (ошибки ΔL, Δh — по цене деления линейки):

ε	L, мм	h, мм	d, мкм	Δd, мкм	$(d-d_0)/\Delta d$
0	48 ± 2	$19 \pm 0{,}5$	25,0	0	0
0,23	59 ± 2	$16{,}5 \pm 0{,}5$	23,4	1,2	−1,3
0,40	67 ± 2	$14{,}5 \pm 0{,}5$	23,5	1,1	−1,4
0,56	75 ± 3	$13 \pm 0{,}5$	23,4	1,1	−1,5
0,69	81 ± 3	$12 \pm 0{,}5$	23,5	1,3	−1,2
0,85	89 ± 3	$10{,}5 \pm 0{,}5$	24,4	1,4	−0,4

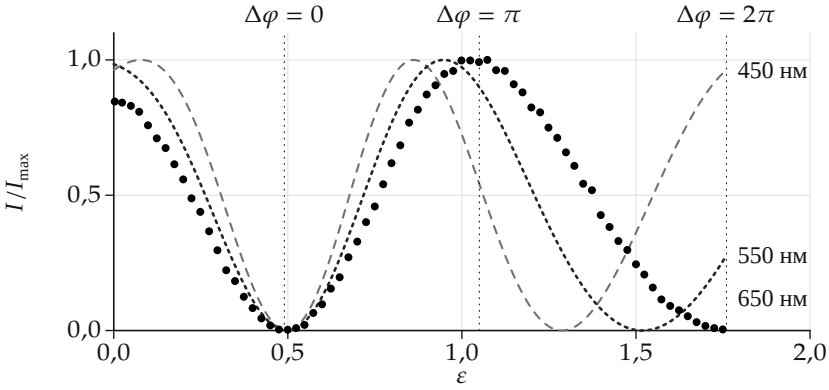
Столбцы L, h, d, Δd — числа организаторов; $\varepsilon = L/L_0 - 1$ и последний столбец посчитаны нами. Погрешность толщины — по формуле орга-

низаторов:

$$\frac{\Delta d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}.$$

(Пересчёт по ней даёт $\Delta d = 1{,}06; 1{,}07; 1{,}30; 1{,}31; 1{,}42$ мкм: во второй и четвёртой строках у организаторов, по-видимому, переставлены 1,2 и 1,1 — на вывод это не влияет.) Все точки лежат в пределах $1{,}5\,\Delta d$ от d_0; их общий сдвиг вниз ($\approx 5\,\%$) того же порядка, что общая для всех строк погрешность начальных L_0 и h_0 ($\approx 5\,\%$), которая в Δd не входит. Вывод: изменение толщины в пределах погрешности, дальше, как велит условие, $d = d_0 = 25$ мкм.

Пункт 3. Интенсивность прошедшего света. Пропускаем луч лазера через Π_1, плёнку и Π_2 (лазер поляризован, поэтому Π_1 поворачиваем до достаточной мощности). Ток фотодиода пропорционален мощности (указание 3), поэтому он и есть I в условных единицах; нормируем на максимум и снимаем $I(\varepsilon)$ малыми шагами растяжения (у организаторов их около 70). Результат на рисунке (точки сняты с графика организаторов): интенсивность падает от 0,85 при $\varepsilon = 0$ до нуля при $\varepsilon \approx 0{,}49$, растёт до максимума при $\varepsilon \approx 1{,}05$ и снова спадает до нуля при $\varepsilon \approx 1{,}76$, где плёнка уже близка к разрыву. Итак, экстремумов внутри диапазона три: минимум (0,49), максимум (1,05), минимум (1,76). Организаторы пишут «два максимума и два минимума», считая максимумом и пологое начало $I(0) = 0{,}85$; но это край диапазона, а не настоящий максимум: интенсивность там уже убывает, и $\Delta\varphi(0) = -2{,}35$, а не $-\pi$ (при $-\pi$ было бы $I = I_{\max}$). Второй минимум совпадает с концом измерений.



Точки — измеренная $I(\varepsilon)$ (красный лазер); штрих и пунктир — пропускание для 450 и 550 нм по $\Delta n(\varepsilon)$ из пункта 5; вертикали — $\Delta\varphi$ в экстремумах.

Пункт 4. Какой минимум — $\Delta\varphi = 0$. Первый, при $\varepsilon \approx 0{,}49$. Рассуждение: минимум $I = 0$ означает $\Delta\varphi = 2\pi k$, то есть $d\Delta n = k\lambda$. Для $k \neq 0$ положение минимума зависит от длины волны, а при $k = 0$, то есть $\Delta n = 0$, — нет. В белом свете в первом минимуме ($\varepsilon \approx 0{,}5$, растяжение в 1,5 раза) видна темнота для всех цветов, а на втором минимуме лазера ($\varepsilon \approx 1{,}76$) — не темнота, а смена цвета: он минимум только для красного (650 нм). Это видно и на рисунке: кривые пропускания для 450 и 550 нм, вычисленные по тому же $\Delta n(\varepsilon)$, обращаются в нуль вместе с красной в одной точке $\varepsilon_0 \approx 0{,}49$, а следующие нули у каждого цвета свои (1,3; 1,5; 1,76).

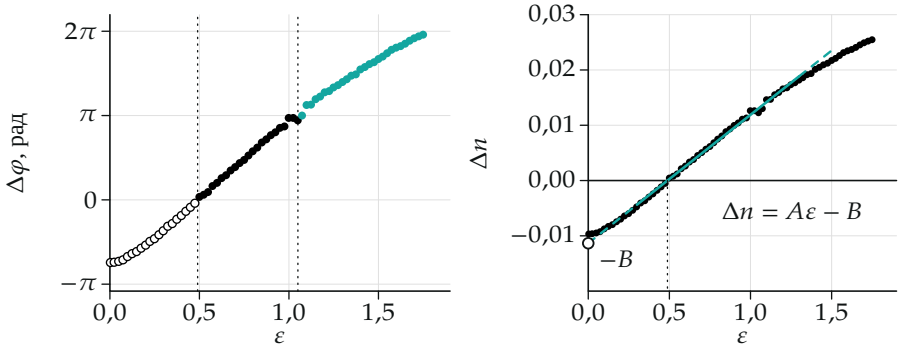
Пункт 5. Восстановление $\Delta\varphi(\varepsilon)$, $\Delta n(\varepsilon)$ и коэффициенты A, B. Из $I/I_{\max} = \sin^2(\Delta\varphi/2)$ имеем $|\Delta\varphi| = 2\arcsin\sqrt{I/I_{\max}}$ с точностью до ветви. Ветвь выбираем так, чтобы $\Delta\varphi$ менялось непрерывно и монотонно (линейное $\Delta n(\varepsilon)$ растёт с ε), проходя нуль в первом минимуме, а в максимуме и во втором минимуме принимало значения π и 2π:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -2\arcsin\sqrt{I/I_{\max}}, & \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ (по условию } \Delta n < 0), \\ 2\arcsin\sqrt{I/I_{\max}}, & \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}, \\ 2\pi - 2\arcsin\sqrt{I/I_{\max}}, & \varepsilon > \varepsilon_{\max}. \end{cases}$$

Затем $\Delta n = \dfrac{\lambda\,\Delta\varphi}{2\pi d}$ при $d = d_0$, $\lambda = 650$ нм (множитель $\lambda/(2\pi d) =$

$4{,}14 \cdot 10^{-3}$). Несколько точек:

ε	$I/I_{\max}$	$\Delta\varphi$, рад	Δn
0	0,85	−2,35	−0,0097
0,25	0,44	−1,45	−0,0060
0,49	0	0	0
0,75	0,46	1,49	0,0062
1,05	1	π	0,0130
1,25	0,75	4,19	0,0173
1,50	0,24	5,26	0,0218
1,76	0	2π	0,0260



Слева — $\Delta\varphi(\varepsilon)$: пустые кружки — ветвь до первого минимума, чёрные — между минимумом и максимумом, бирюзовые — после максимума. Справа — $\Delta n(\varepsilon)$ и прямая МНК на участке $0{,}3 \le \varepsilon \le 1{,}3$ (штрих — продолжение; пунктир на оси — ε_0).

По условию зависимость линейна: $\Delta n = A\varepsilon - B$. Точки ложатся на прямую в середине диапазона и отклоняются от неё у краёв (при $\varepsilon < 0{,}3$ и $\varepsilon > 1{,}3$), поэтому прямую проводим методом наименьших квадратов по участку $0{,}3 \le \varepsilon \le 1{,}3$ (40 точек):

$$A = 0{,}0232 \pm 0{,}0002, \qquad B = 0{,}0113 \pm 0{,}0002.$$

Это только разброс точек. Полная погрешность определяется в основном толщиной: d известна с $\approx 5\,\%$ (пункт 2), и A, B пропорциональ-

ны $1/d$; выбор участка меняет A в пределах 0,0230–0,0236. Итог: $A = 0{,}023 \pm 0{,}001$, $B = 0{,}011 \pm 0{,}001$.

Обратите внимание: график $\Delta\varphi(\varepsilon)$ в решении организаторов построен вдвое выше, чем следует из формулы: он доходит до $12{,}4 \approx 4\pi$ при втором минимуме, а должно быть $2\pi \approx 6{,}3$; при $\varepsilon = 0$ у них $-4{,}7$, а из $I = 0{,}85$ выходит $-2\arcsin\sqrt{0{,}85} = -2{,}35$. Их значения в точности равны $4\arcsin\sqrt{I/I_{\max}}$ — лишняя двойка: вместо $2\arcsin$ взято $4\arcsin$. Проверка через их же Δn: по их рис. 6 $\Delta n(0) = -0{,}0097 = \frac{\lambda}{2\pi d}\cdot(-2{,}35)$, а с их $-4{,}7$ было бы $-0{,}0195$. Их график $\Delta n(\varepsilon)$ и числа A, B верны и совпадают с нашими.

Проверка. Размерность: Δn, A, B безразмерны, как и ε. Согласованность: $\Delta n = 0$ при $\varepsilon_0 = B/A = 0{,}0113/0{,}0232 = 0{,}49$, это совпадает с положением первого минимума (0,49), по которому прямая не подгонялась. Знак: $\Delta n(0) = -B < 0$, как в условии. Независимо от лазера: на шкале цветов между скрещёнными поляризаторами жёлтый, красный, синий, зелёный идут при росте $d\Delta n$ примерно от 0,3 до 0,65 мкм; наш $\Delta n(\varepsilon)$ даёт $d\Delta n \approx 0{,}30$; 0,49; 0,65 мкм при $\varepsilon = 1{,}0$; 1,3; 1,76 — те же цвета в том же порядке. На краях линейная модель неточна: при $\varepsilon = 0$ она даёт $I = \sin^2(\pi dB/\lambda) = 0{,}96$ вместо измеренных 0,85.

Смысл: по яркости на одной длине волны фазу не восстановить, пока не найден отсчёт; его даёт белый свет — единственный минимум, общий для всех цветов.

Ответ. 1) Нерастянутая плёнка светлая с жёлтым оттенком; при $\varepsilon \approx 0{,}5$ (растяжение в 1,5 раза) интенсивность падает до нуля для всех длин волн, дальше цвета: жёлтый, красный, синий, зелёный. 2) $d = d_0 L_0 h_0/(Lh)$; во всём диапазоне $d \approx$ 23–25 мкм, то есть постоянна в пределах погрешности. 3) $I(\varepsilon)$: минимумы при $\varepsilon \approx 0{,}49$ и 1,76, максимум при $\varepsilon \approx 1{,}05$, на краю $\varepsilon = 0$ — $I = 0{,}85 I_{\max}$ (организаторы считают его вторым максимумом; рисунок). 4) Первый минимум, $\varepsilon \approx 0{,}49$: только он общий для всех длин волн. 5) $A = 0{,}023 \pm 0{,}001$, $B = 0{,}011 \pm 0{,}001$.