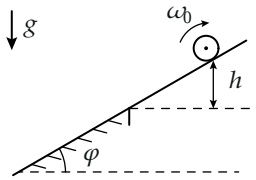
Цилиндр на наклонной плоскости

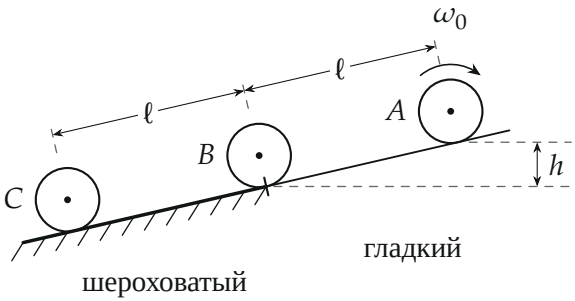
Задача 1. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 1] «Цилиндр на наклонной плоскости». Верхняя часть наклонной плоскости гладкая, нижняя — шероховатая. На верхнюю часть кладут тонкостенную цилиндрическую трубу, вращающуюся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0, и отпускают. В начальный момент ось цилиндра неподвижна, а линия касания трубы с плоскостью находится на высоте $h = 10$ см над границей раздела гладкого и шероховатого участков. Коэффициент трения между трубой и шероховатой поверхностью $\mu = 0{,}1$. Радиус цилиндра равен $R = 5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Считайте, что ω_0 велико. При каком угле $\varphi = \varphi_m$ труба вернется в начальное положение за минимальное время.
2. Найдите это минимальное время $t_{\min}$.
3. Пусть $\varphi = \varphi_m$. При каких ω_0 труба вернется в начальное положение?

▲ **Решение.** **Что происходит.** На гладком участке труба разгоняется вниз, на шероховатом попадает под действие трения скольжения: вращение с угловой скоростью ω_0 направлено так, как вращалась бы труба, катясь вверх, поэтому точка касания скользит вниз по склону, и сила трения направлена вверх. Она тормозит трубу, останавливает, разгоняет вверх, и труба выходит на границу участков с той же скоростью, с какой въехала; дальше по гладкому склону она поднимается до начальной высоты. Класс задачи: движение с проскальзыванием — поступательное движение центра и вращение вокруг оси связаны через силу трения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Пока проскальзывание есть, все ускорения постоянны, и движение складывается из участков равноускоренного движения. Главная

идея — сложить времена этих участков и найти угол, при котором сумма минимальна.



Путь трубы: A — старт, B — граница участков, C — самая нижняя точка. Угол наклона на рисунках увеличен.

Обозначения. Ось x направим вдоль склона вверх; v — проекция скорости центра трубы на эту ось. Угловую скорость $\omega > 0$ отсчитываем в сторону, в которую вращается труба на рисунке (как при качении вверх); тогда скорость точки касания относительно склона, вызванная вращением, равна $-\omega R$ (вниз). Масса трубы m, момент инерции тонкостенной трубы относительно оси $I = mR^2$. Скорость на границе участков v_0, путь по склону от старта до границы ℓ.

1. Гладкий участок. Трения нет, поэтому вращение на движение центра не влияет и $\omega = \omega_0$ не меняется. Второй закон Ньютона для трубы в проекции на ось x (ось вдоль склона — тогда N в уравнение не входит): $ma = -mg\sin\varphi$, ускорение $g\sin\varphi$ направлено вниз по склону. До границы труба проходит по склону путь $\ell = h/\sin\varphi$ (линия касания опускается на h). Скорость на границе найдём из закона сохранения механической энергии центра (работа N равна нулю, трения нет): $mv_0^2/2 = mgh$,

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}1}\ \text{м/с} \approx 1{,}4\ \text{м/с}.$$

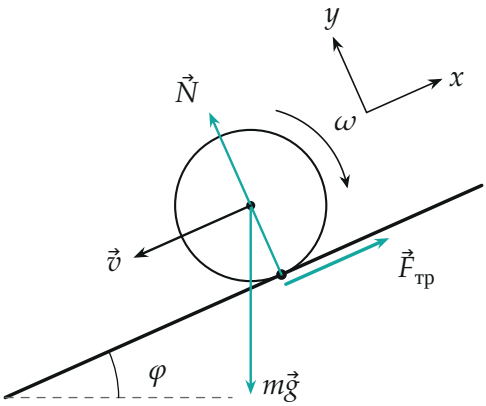
Она не зависит от φ. Время спуска $t_1 = v_0/(g\sin\varphi)$.

2. Шероховатый участок: силы. Точка касания движется относительно склона вдоль оси x со скоростью $v - \omega R$. Пока $\omega R > v$, она скользит вниз, и сила трения скольжения направлена вверх по склону

(рисунок ниже). Поперёк склона ускорения нет: $N = mg\cos\varphi$, поэтому

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\varphi.$$

Обратите внимание: направление трения определяет скорость точки касания относительно склона, а не скорость центра. Поэтому, пока $\omega R > v$, сила одна и та же и при движении трубы вниз, и при движении вверх.



Тонкостенная труба на шероховатом участке (труба скользит вниз, $\omega R > v$): силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$ и оси.

Запишем второй закон Ньютона для центра трубы в проекции на ось x и уравнение моментов относительно оси трубы. Сила трения приложена на расстоянии R от оси и вращает трубу против направления ω:

$$ma = \mu mg\cos\varphi - mg\sin\varphi, \qquad mR^2\dot{\omega} = -\mu mgR\cos\varphi.$$

Отсюда

$$a_2 = g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi), \qquad R\dot{\omega} = -\mu g\cos\varphi.$$

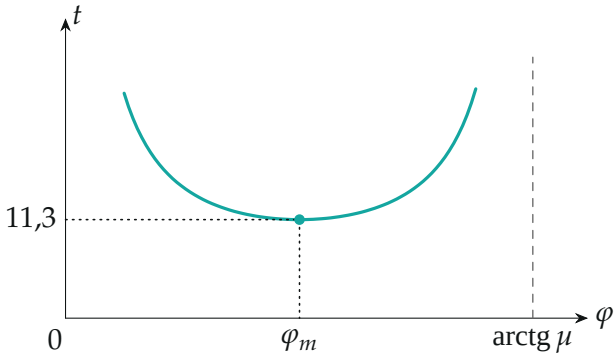
Обе величины постоянны, поэтому v и ω меняются линейно со временем. Чтобы труба тормозилась, нужно $a_2 > 0$, то есть $\operatorname{tg}\varphi < \mu$: иначе она не остановится и не вернётся.

3. Полное время. На границе $v = -v_0$ (вниз). С постоянным ускорением a_2 скорость вырастет до $+v_0$ за время $2v_0/a_2$: труба сначала остановится, потом поедет вверх и выйдет на границу с той же скоростью v_0

(эта симметрия верна, пока проскальзывание не прекратилось). На гладком склоне она замедляется с тем же $g\sin\varphi$, с каким разгонялась, поэтому остановится ровно в начальной точке за время $v_0/(g\sin\varphi)$. Складываем четыре участка:

$$t(\varphi) = \frac{2v_0}{g\sin\varphi} + \frac{2v_0}{g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)} = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\mu\cos\varphi - \sin\varphi}\right).$$

Качественная картина (график ниже): при малом φ труба медленно ползёт по гладкой части, при $\varphi \to \operatorname{arctg}\mu$ ускорение $a_2 \to 0$ и труба бесконечно долго тормозится на шероховатой части. Между этими крайностями время имеет минимум.



Зависимость времени возвращения t от угла φ.

Пункт 1. Так как $\varphi \ll 1$ ($\operatorname{tg}\varphi < \mu = 0{,}1$), положим $\cos\varphi \approx 1$ и введём $s = \sin\varphi$:

$$t = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\mu - s}\right).$$

Сумма $s + (\mu - s) = \mu$ постоянна, а сумма обратных величин двух положительных чисел с постоянной суммой минимальна, когда числа равны ($s = \mu - s$). Значит, $\sin\varphi_m = \mu/2 = 0{,}05$ и

$$\varphi_m \approx 0{,}05 \text{ рад} \approx 2{,}9^\circ.$$

Второй способ — производная $dt/d\varphi = 0$ без приближения $\cos\varphi \approx 1$: после преобразования получаем $\mu\cos^3\varphi_m = \sin\varphi_m(1 + \cos^2\varphi_m)$, то

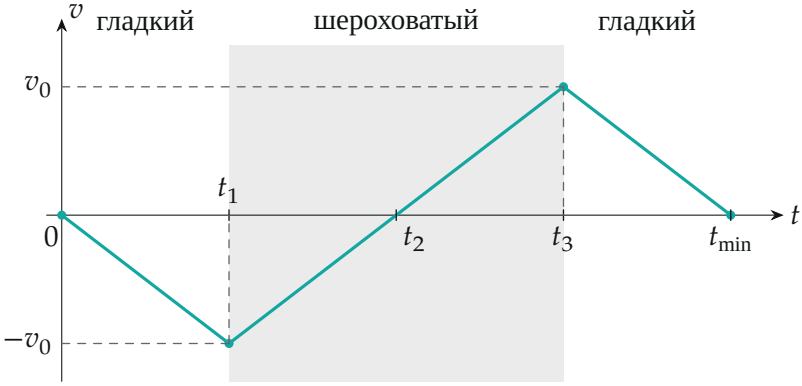
есть

$$\sin\varphi_m = \frac{\mu\cos^3\varphi_m}{1+\cos^2\varphi_m} < \mu.$$

Численное решение этого уравнения даёт $\varphi_m = 0{,}0499$ рад — то же значение, отличие около 0,2%.

Пункт 2. При $\sin\varphi_m = \mu/2$ оба ускорения одинаковы: $g\sin\varphi_m = a_2 = \mu g/2 = 0{,}5$ м/с^2. График скорости — симметричная ломаная из четырёх равных по времени участков по $v_0/a = 2{,}8$ с:

$$t_{\min} = \frac{2v_0}{g}\cdot\frac{4}{\mu} = \frac{8v_0}{\mu g} = \frac{8\sqrt{2gh}}{\mu g} \approx \frac{8\cdot 1{,}41}{0{,}1\cdot 10}\text{ с} \approx 11{,}3\text{ с}.$$



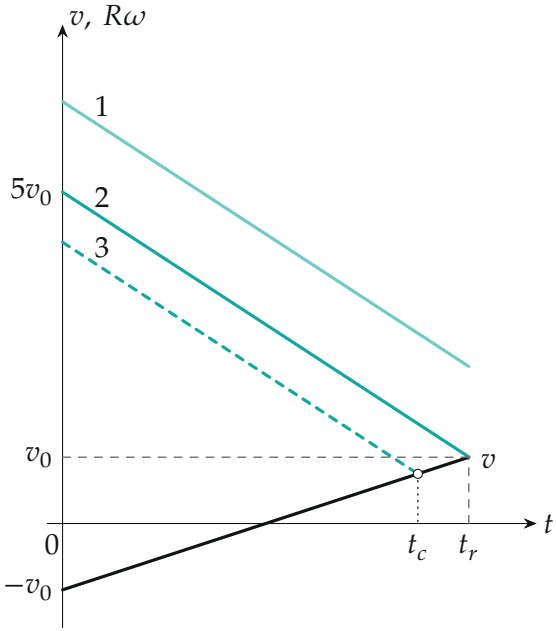
Проекция скорости центра трубы на ось x (вверх по склону) при $\varphi = \varphi_m$: гладкий участок 0–t_1, шероховатый t_1–t_3, гладкий t_3–$t_{\min}$.

Пункт 3. Когда проскальзывание не прекращается. Формулы пунктов 1–2 верны, пока $\omega R > v$ на всём шероховатом участке. Разность $\omega R - v$ убывает линейно, поэтому достаточно проверить конец участка, когда труба снова выходит на границу. За время шероховатого участка $t_r = 2v_0/a_2 = 4v_0/(\mu g)$ скорость центра меняется на $\Delta v = 2v_0$, а $R\omega$ уменьшается на $\mu g\cos\varphi\, t_r \approx 4v_0$ (равенство $R\Delta\omega = -2\Delta v$ следует из деления уравнений пункта 2 при $\sin\varphi_m = \mu/2$: $dv = -\frac{1}{2}R\,d\omega$). В

конце участка нужно $R\omega \geq v = v_0$:

$$R\omega_0 - 4v_0 \geq v_0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 \geq \omega_* = \frac{5v_0}{R} = \frac{5\sqrt{2gh}}{R} = 100\sqrt{2}\,\text{с}^{-1} \approx 141\,\text{с}^{-1}.$$

Обратите внимание: при $\omega_0 < \omega_*$ проскальзывание прекращается раньше, труба катится без проскальзывания (трение покоя, $F_{\text{тр}} < \mu N$), её ускорение вниз становится $g\sin\varphi/2$, и на границу она выходит медленнее v_0 — до старта не дойдёт. При $\omega_0 = \omega_*$ проскальзывание прекращается ровно на границе.



Шероховатый участок: $R\omega$ убывает быстрее, чем растёт v. Линии 1, 2, 3 — $R\omega$ при $\omega_0 > \omega_*$, $\omega_0 = \omega_*$, $\omega_0 < \omega_*$; у линии 3 проскальзывание кончается в точке пересечения с v.

Проверка. Размерности: $[8v_0/(\mu g)]$ = м/с / (м/с^2) = с, $[5v_0/R]$ = с$^{-1}$. Численное моделирование движения (уравнения пунктов 1–2 с переходом на качение без проскальзывания) даёт: при $\omega_0 \geq 141{,}4$ с$^{-1}$ труба останавливается в начальной точке за 11,3 с, при $\omega_0 = 141$ с$^{-1}$

не доходит до старта 2 см вдоль склона (по высоте 1 мм), при 130 с^{-1} — 0,75 м (по высоте 3,7 см). Поэтому в ответе «≥», а не «=», как у организаторов: при $\omega_0 > \omega_*$ проскальзывание тоже длится весь шероховатый участок, и движение то же самое; порог $100\sqrt{2} = 141{,}4$ с^{-1}, а не «≈ 140».

Смысл: при $\sin\varphi_m = \mu/2$ чистая сила вдоль склона на шероховатом участке равна по модулю силе на гладком, поэтому движение трубы — симметричные «качели» из четырёх одинаковых участков. Трение должно только вовремя развернуть трубу, а вращение — хватить на весь шероховатый участок.

Ответ. 1) $\sin\varphi_m = \dfrac{\mu\cos^3\varphi_m}{1+\cos^2\varphi_m}$, $\varphi_m \approx 0{,}05$ рад ($\approx 2{,}9°$); 2) $t_{\min} = \dfrac{8\sqrt{2gh}}{\mu g} \approx 11{,}3$ с; 3) $\omega_0 \geq \dfrac{5\sqrt{2gh}}{R} \approx 141$ с^{-1}.