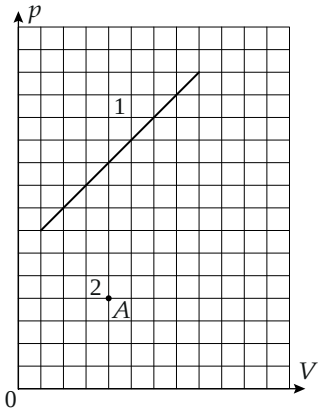
Совпадающие теплоемкости

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 2] «Совпадающие теплоемкости». В архиве лорда Кельвина нашли цилиндр с одним молем идеального одноатомного газа. Лорд Кельвин проводил с ним два процесса и изобразил их на pV-диаграмме. Чернила, разумеется, выцвели. От первого процесса уцелела часть графика — отрезок прямой, а от графика второго процесса, как обычно, сохранилась единственная точка A. Из поясняющих записей следовало, что в этих процессах при равных температурах теплоёмкости совпадали. Восстановите график зависимости давления p от объёма V для второго процесса.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Теплоёмкость процесса $C = dQ/dT$ зависит не только от газа, но и от того, как в процессе меняется объём: чем быстрее при нагревании растёт объём, тем больше работы совершает газ и тем больше теплоты на градус нужно подвести. Поэтому равенство теплоёмкостей при равных температурах — это условие на то, как объёмы двух процессов зависят от температуры. Главная идея: оно означает, что $V_2(T)$ и $V_1(T)$ растут «одинаково в процентах», то есть отличаются постоянным множителем k. Остаётся найти k по точке A и перенести первый график. Класс задачи: первое начало термодинамики для малого процесса, C через dU и $p\,dV$.

Обозначения. Газ один моль, $C_V = \frac{3}{2}R$. Объёмы в процессах 1 и 2 при температуре T — $V_1(T)$ и $V_2(T)$, давления — p_1 и p_2. Единицы —

клетки рисунка: по оси V одна клетка — единица объёма, по оси p — единица давления. Температура $T = pV/R$ измеряется произведением pV в клетках^2. По рисунку: точка A — $V_A = 4$, $p_A = 4$; отрезок первого процесса идёт из точки $(1;7)$ в точку $(8;14)$.

1. Теплоёмкость через объём. Запишем первое начало термодинамики для малого процесса при изменении температуры на dT: $dQ = dU + p\,dV$, где $dU = C_V\,dT$ (внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры). Делим на dT и подставляем $p = RT/V$:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{3}{2}R + p\frac{dV}{dT} = \frac{3}{2}R + R\,\frac{T}{V}\frac{dV}{dT}.$$

Обратите внимание: в условии — теплоёмкость всего газа (в одном моле она же молярная), поэтому число молей отдельно не нужно.

2. Что даёт равенство теплоёмкостей. При одинаковой температуре $C_1 = C_2$, а слагаемое $\frac{3}{2}R$ у них общее, поэтому для каждого T

$$\frac{1}{V_1}\frac{dV_1}{dT} = \frac{1}{V_2}\frac{dV_2}{dT} \implies \frac{d}{dT}(\ln V_2 - \ln V_1) = 0, \qquad V_2(T) = k\,V_1(T),$$

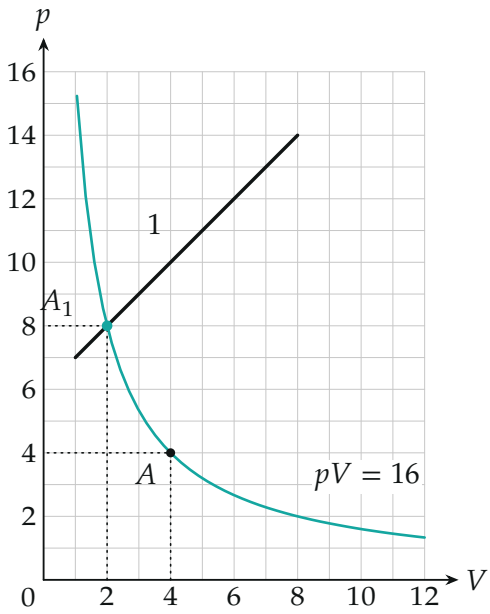
где k — постоянная (здесь считаем, что каждая температура на отрезке встречается один раз — у первого процесса $pV = 6V + V^2$ растёт вместе с V). Давление при той же температуре: $p_2 = RT/V_2 = p_1/k$. Каждая точка $(V_1;p_1)$ первого графика переходит в точку $(kV_1;\,p_1/k)$ второго: объём растянут в k раз, давление сжато в k раз. Такое преобразование плоскости pV сохраняет площади, поэтому не меняет ни температуры pV, ни работу $p\,dV$, ни теплоёмкость — это второй способ получить тот же вывод.

3. Находим k по точке A. Температуру точки A задаёт произведение $p_AV_A = 4 \cdot 4 = 16$ (клеток^2). Эта же температура есть и у первого процесса, в точке с $p_1V_1 = 16$. Прямая первого процесса проходит через $(1;7)$ и $(8;14)$, наклон $(14-7)/(8-1) = 1$, то есть $p_1 = 6 + V_1$. Тогда

$$(6 + V_1)V_1 = 16 \implies V_1^2 + 6V_1 - 16 = 0 \implies V_1 = 2, \quad p_1 = 8$$

(второй корень $V_1 = -8$ не подходит). Отсюда $k = V_A/V_1 = 4/2 =$

2. Проверим вторую координату: $p_A = p_1/k = 8/2 = 4$ — совпало с рисунком.

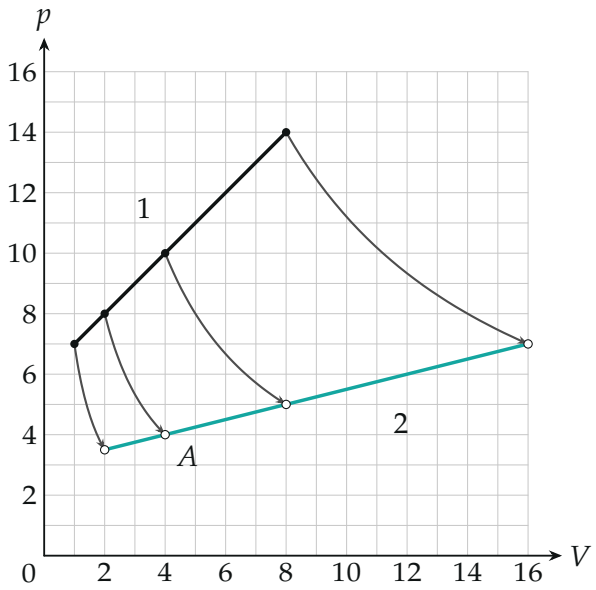


Изотерма $pV = 16$ через точку A пересекает отрезок 1 в точке A_1 с $V_1 = 2$, $p_1 = 8$.

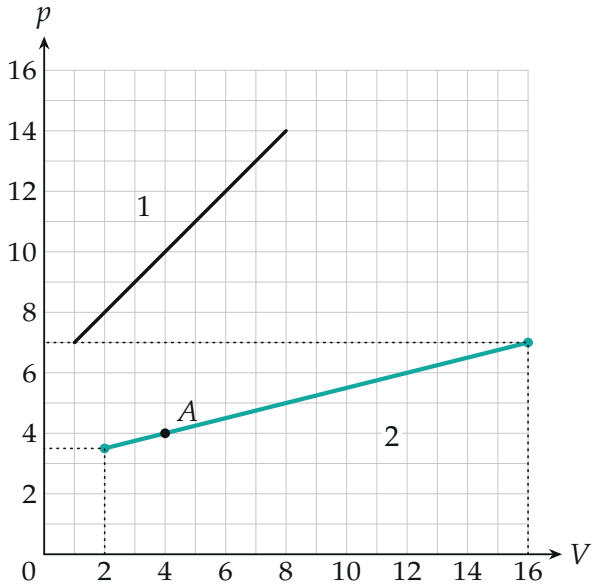
4. Строим второй график. Точки второго процесса — образы точек отрезка 1 при $V \to 2V$, $p \to p/2$ (рисунок: пары точек на изотермах; каждая пара лежит на одной изотерме, и температура у неё одна):

$$p_2 = \frac{p_1}{2} = \frac{6 + V_1}{2} = 3 + \frac{V_2}{4}.$$

Это прямая с наклоном $1/4$ (наклон первого графика, делённый на k^2) — она проходит и через A: $3 + 4/4 = 4$. Концы отрезка: из точки $(1;7)$ получаем $(2;3{,}5)$, из точки $(8;14)$ — $(16;7)$. Вне этого отрезка первый процесс на рисунке стёрт, значит, неизвестно, какая температура и какая теплоёмкость там были, и восстановить второй процесс нельзя: график определён только на отрезке между этими точками.



Каждая точка отрезка 1 (чёрные точки) переходит по изотерме в точку отрезка 2 (светлые): объём вдвое больше, давление вдвое меньше.

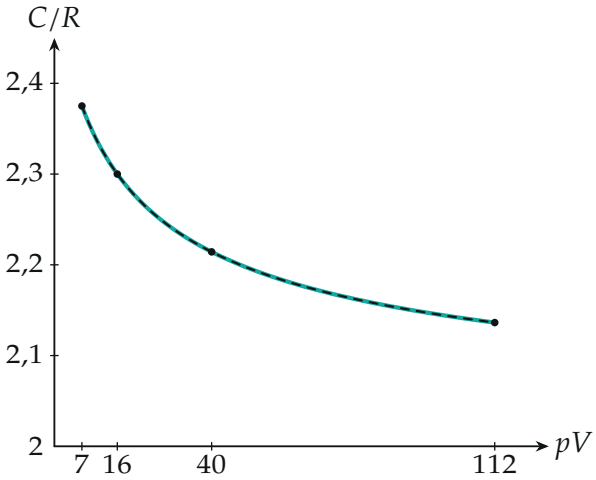


Восстановленный график второго процесса — отрезок 2 от точки $(2;3{,}5)$ *до точки* $(16;7)$ *через* A.

Проверка. Считаем теплоёмкости напрямую. Для прямой $p = a + bV$ малое изменение температуры $R\,dT = d(pV) = (p + bV)\,dV$, поэтому

$$\frac{C}{R} = \frac{3}{2} + \frac{p}{p + bV}.$$

Процесс 1 ($a = 6$, $b = 1$) в точке $V_1 = 2$, $p_1 = 8$: $C/R = \frac{3}{2} + \frac{8}{10} = 2{,}3$. Процесс 2 ($b = \frac{1}{4}$) в точке A ($V = 4$, $p = 4$): $C/R = \frac{3}{2} + \frac{4}{5} = 2{,}3$ — та же температура и та же теплоёмкость. На концах отрезков тоже совпадает: 2,375 при $pV = 7$ и $\frac{3}{2} + \frac{14}{22} \approx 2{,}136$ при $pV = 112$; зависимости $C(pV)$ у двух процессов совпадают на всём отрезке (рисунок ниже, ось C/R начинается с 2). Предельный случай: $k = 1$ даёт сам первый процесс.



Теплоёмкость C/R как функция температуры (pV): сплошная линия — процесс 1, пунктир — процесс 2.

Смысл: два процесса с одной и той же теплоёмкостью при каждой температуре — это один и тот же процесс, «растянутый» по объёму и сжатый по давлению с сохранением изотерм.

Ответ. Отрезок прямой $p = 3 + V/4$ (в клетках графика) между точками $(V;\, p) = (2;\, 3{,}5)$ и $(16;\, 7)$, проходящий через A.