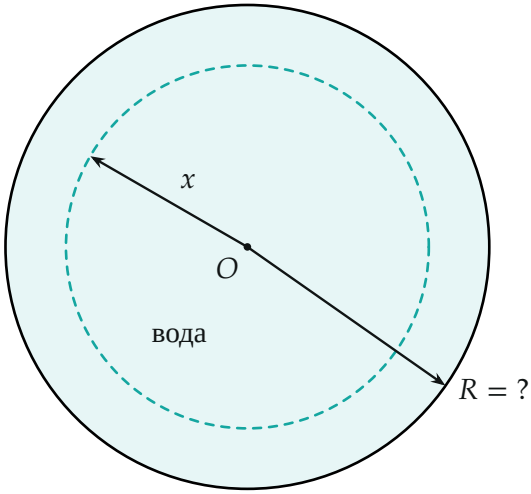
В пузыре

Задача 3. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 3] «В пузыре». В далёком космосе есть планета, состоящая полностью из воды. Известно, что глубоководные обитатели изнутри могут обозревать всё пространство вокруг тогда и только тогда, когда находятся на расстоянии не более, чем $x = 3000$ км от центра планеты. Местные жители решили запустить спутник. С какой скоростью он должен двигаться на самой низкой возможной орбите? Показатель преломления воды $n = 4/3$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Планета не вращается вокруг своей оси, волн на её поверхности не бывает, воду можно считать несжимаемой.



Поясняющий рисунок. Внутри шара радиуса x живут те, кто видит всё небо; радиус планеты R неизвестен.

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость спутника на самой низкой орбите зависит от радиуса планеты R (через её массу), а радиус не дан. Зато дана косвенная информация: до какого расстояния x от центра наблюдатель ещё видит всё небо. Небо видно через поверхность, а на поверхности воды есть полное внутреннее отражение: свет изнутри выходит наружу, только если угол падения не больше предельного γ_c, $\sin\gamma_c = 1/n$.

Главная идея: самая «косая» линия взгляда наблюдателя — та, что перпендикулярна радиусу к нему; граница видимости x означает, что для неё угол падения как раз равен γ_c. Это даёт R, а дальше — закон тяготения и круговая орбита. Класс задачи: геометрическая оптика (полное внутреннее отражение, преломление на сфере) плюс первая космическая скорость.

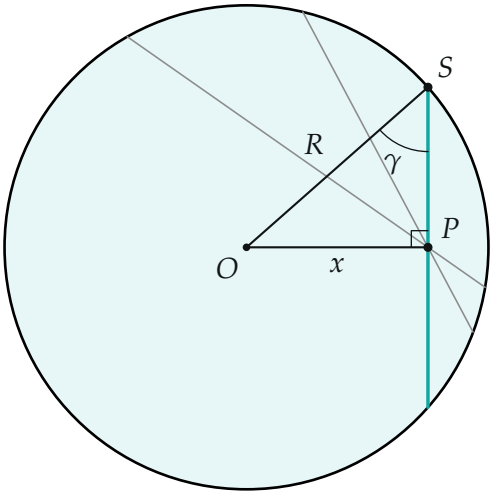
Обозначения. O — центр планеты, P — наблюдатель, $|OP| = x$. Линия взгляда — любая прямая через P; она выходит на поверхность в точке S, $|OS| = R$. θ — угол между PO и PS, γ — угол между SP и радиусом SO: это угол падения света на поверхность изнутри (нормаль к сфере — её радиус).

1. Какие углы падения бывают у одного наблюдателя. Рассмотрим треугольник OPS (рисунок). По теореме синусов

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{x}{\sin\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \sin\gamma = \frac{x}{R}\sin\theta.$$

Наблюдатель может смотреть в любую сторону, то есть θ пробегает все значения. Угол падения наибольший, когда $\sin\theta = 1$, то есть при $\theta = 90°$ — линия взгляда перпендикулярна OP:

$$\sin\gamma_{\max} = \frac{x}{R}.$$



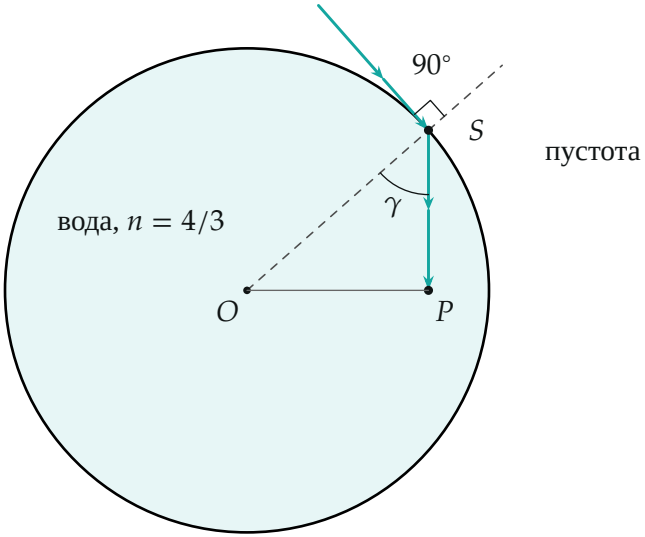
Наблюдатель P на расстоянии x от центра. Бирюзовая линия взгляда перпендикулярна OP — у неё самый большой угол падения γ; серые — другие направления.

2. Условие видимости всего неба. Свет снаружи падает на воду под углом β от 0 до 90° (касательный к поверхности свет — 90°) и преломляется: $\sin\beta = n\sin\gamma$. Значит, внутрь воды попадают лучи с $\sin\gamma \le 1/n$, то есть с $\gamma \le \gamma_c = \arcsin(1/n) = \arcsin\frac{3}{4} \approx 48{,}6°$. Если угол падения изнутри больше γ_c, наблюдатель в этом направлении видит не космос, а полностью отражённую воду. Всё небо видно, когда для каждой линии взгляда $\gamma \le \gamma_c$, а достаточно проверить самую косую:

$$n\sin\gamma_{\max} = \frac{nx}{R} \le 1.$$

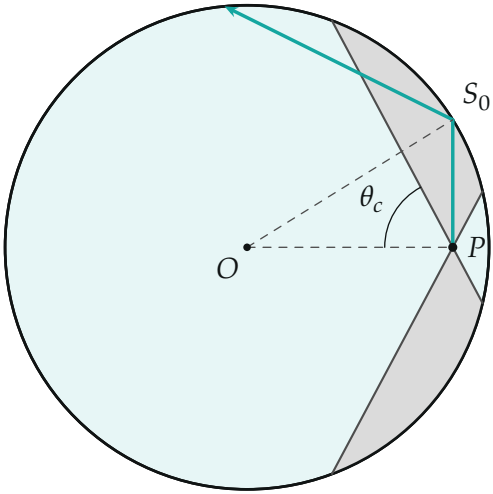
По условию «тогда и только тогда» граница — ровно при $x = 3000$ км: при меньших x небо видно целиком, при больших пропадает его часть. Значит, на границе стоит равенство:

$$\frac{nx}{R} = 1, \qquad R = nx = \frac{4}{3}\cdot 3000\text{ км} = 4000\text{ км}.$$



Граничный наблюдатель ($x = R/n$): касательный к поверхности свет идёт в воде под углом γ_c к радиусу и приходит в точку P по перпендикуляру к OP.

Обратите внимание: определяет границу именно перпендикулярная линия взгляда, а не радиальная (радиальный луч падает под $\gamma = 0$ при любом x). Если наблюдатель дальше границы ($x > R/n$), возникает «мёртвый» конус направлений: для них $\sin\theta > R/(nx)$, и они закрыты полным отражением (рисунок ниже, $x = 3{,}4$ тыс. км).



Наблюдатель дальше границы: линии взгляда внутри серого конуса (угол θ от θ_c до $180^\circ - \theta_c$, $\sin\theta_c = R/(nx)$) полностью отражаются — например, PS_0.

3. Спутник на самой низкой орбите. Волн нет и планета не вращается, поэтому низшая орбита — у самой поверхности, её радиус равен R. Запишем второй закон Ньютона для спутника массой m в проекции на радиус, к центру (сила тяготения — единственная сила, ускорение центростремительное):

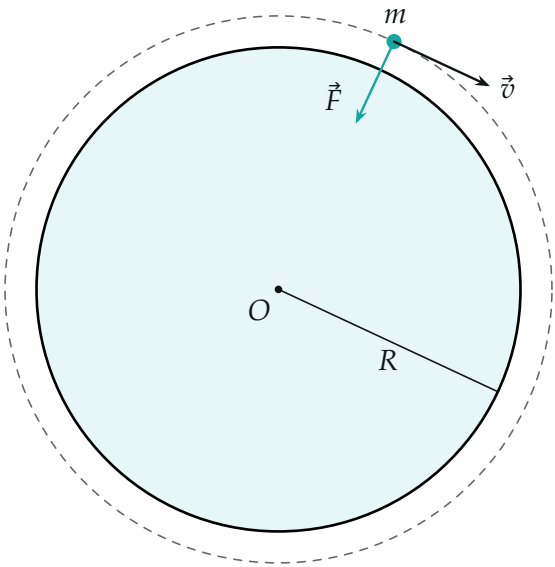
$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Масса планеты — масса шара из несжимаемой воды: $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Подставляем и выражаем R через найденное:

$$v^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho R^2, \qquad v = R\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} = nx\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}.$$

Числа: подкоренное выражение $\dfrac{4\pi G\rho}{3} \approx 2{,}79\cdot10^{-7}$ с$^{-2}$, корень $\approx 5{,}29\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$, $R = 4{,}0\cdot10^6$ м:

$$v \approx 4{,}0\cdot10^6\cdot5{,}29\cdot10^{-4}\ \text{м/с} \approx 2{,}1\cdot10^3\ \text{м/с} = 2{,}1\ \text{км/с}.$$



Спутник на низшей орбите (её радиус практически равен R; зазор на рисунке увеличен): сила тяготения $\vec{F}$ направлена к центру, скорость $\vec{v}$ — по касательной.

Проверка. Размерность: $[G\rho] = \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}\cdot\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \text{с}^{-2}$, поэтому $R\sqrt{G\rho}$ — метры на секунду. Второй способ — через ускорение свободного падения на поверхности $g_s = GM/R^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho R \approx 1{,}12$ м/с^2: $v = \sqrt{g_s R} = \sqrt{1{,}12\cdot 4\cdot 10^6}$ м/с $\approx$ 2,1 км/с — то же. Предел: $x \to 0$ даёт $R \to 0$ и $v \to 0$, как и должно быть: чем больше планета, тем больше нужная скорость.

Смысл: «пузырь» из воды радиусом 4000 км оказывается планетой с $g_s \approx 1{,}1$ м/с^2 (в девять раз слабее земной), поэтому первая космическая скорость у неё всего 2,1 км/с.

Ответ. $R = nx = 4000$ км; $\quad v = xn\sqrt{\dfrac{4\pi G\rho}{3}} \approx 2{,}1$ км/с.