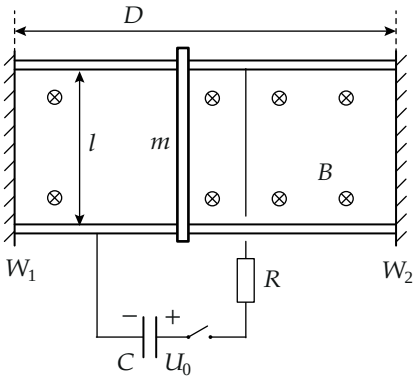
Столкновения в магнитном поле

Задача 4. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 4] «Столкновения в магнитном поле». По двум горизонтальным проводящим рельсам может скользить без трения металлическая перемычка массой m (см. рис.). Расстояние между рельсами l. Движение перемычки ограничено двумя непроводящими жёсткими вертикальными стенками W_1 и W_2, находящимися на расстоянии D друг от друга. К рельсам через ключ K последовательно подключены заряженный до напряжения U_0 конденсатор ёмкости C и резистор сопротивления R. Перпендикулярно плоскости рельсов включено вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B, такое что $m > B^2l^2C$ и $DBl \gg RCU_0$. В момент, когда ключ замкнули, перемычка покоилась посередине между стенками. Определите:



1. с какой стенкой произойдёт первое столкновение перемычки;
2. скорость v_1 перед первым столкновением;
3. скорость v_n перед n-м столкновением.

Все столкновения перемычки со стенками абсолютно упругие.

▲ **Решение. Что происходит.** После замыкания ключа конденсатор разряжается через резистор и перемычку. Ток в перемычке находится в магнитном поле, на неё действует сила Ампера, и она начинает двигаться. Движущаяся перемычка — источник ЭДС Blv, включённый навстречу конденсатору, поэтому ток постепенно спадает до нуля: напряжение на

конденсаторе уравнивается с ЭДС. Условие $DBl \gg RCU_0$ говорит, что этот переходный процесс заканчивается намного раньше, чем перемычка долетит до стенки: к удару ток равен нулю, а $U_C = Blv$. Главная идея: сила Ампера IBl и ток $I = -dq/dt$ связывают скорость перемычки с зарядом конденсатора, поэтому между ударами сохраняется величина $mv + Blq$, а удар меняет только знак скорости. Класс задачи: индукция — ЭДС перемычки, цепь, механика (так решается любая задача про перемычку).

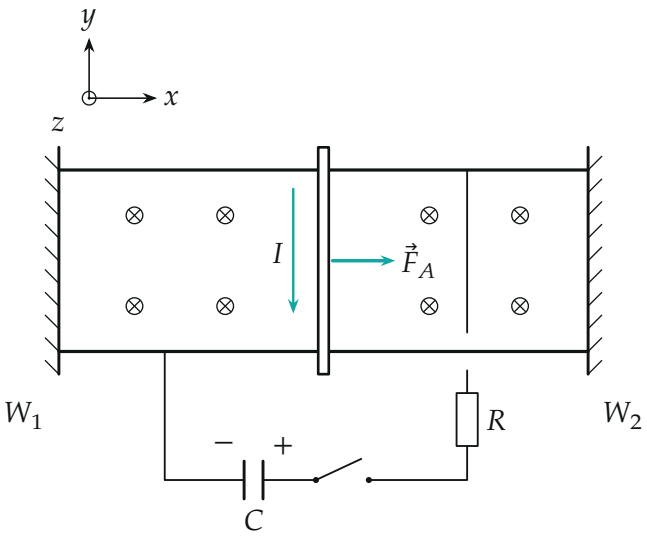
Обозначения. Ось x направим вдоль рельсов вправо, к стенке W_2; v — проекция скорости перемычки. Через q обозначим заряд той пластины конденсатора, которая через R и ключ соединена с верхним рельсом; вначале $q = CU_0 > 0$. Ток I в перемычке считаем положительным, когда он идёт вниз по рисунку (от верхнего рельса к нижнему); тогда $I = -\dot{q}$. Введём безразмерную величину

$$\kappa = \frac{B^2 l^2 C}{m} < 1.$$

1. Куда начнёт двигаться перемычка (пункт 1). Из рисунка условия: плюсовая пластина конденсатора через ключ и резистор соединена с верхним рельсом, минусовая — с нижним. Значит, в перемычке ток течёт сверху вниз, а поле $\vec{B}$ направлено от нас (значки $\otimes$). Возьмём оси: x вправо, y вверх, z на нас. Сила Ампера $\vec{F}_A = I\vec{l} \times \vec{B}$, где $\vec{l}$ — вектор длины перемычки вдоль тока, $\vec{l} \parallel -\hat{y}$, $\vec{B} \parallel -\hat{z}$:

$$\vec{F}_A \parallel (-\hat{y}) \times (-\hat{z}) = \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}.$$

Сила направлена вправо: перемычка сначала движется к стенке W_2, и первое столкновение — с W_2. Второй способ: движущаяся вправо перемычка создаёт ЭДС, толкающую заряды вверх, то есть против тока конденсатора (правило Ленца) — она должна разгоняться током, идущим вниз; так и есть.



Ток конденсатора идёт по перемычке вниз, поле $\vec{B}$ направлено от нас (⊗) — сила $\vec{F}_A$ направлена к W_2.

2. Связь скорости и заряда. Запишем второй закон Ньютона для перемычки в проекции на ось x (рельсы гладкие, вертикальные силы скомпенсированы): $m\,dv/dt = IBl$. Умножим на dt и учтём $I\,dt = -dq$:

$$m\,dv = -Bl\,dq \quad \Longrightarrow \quad mv + Blq = \text{const}.$$

Это верно между ударами. Обратите внимание: удар абсолютно упругий и мгновенный, поэтому он меняет $v \to -v$, а заряд конденсатора q за время удара измениться не успевает.

Второе соотношение — конец переходного процесса: ток прекратился, поэтому напряжение на конденсаторе равно ЭДС перемычки,

$$\frac{q}{C} = Blv \quad \Longrightarrow \quad q = CBl\,v.$$

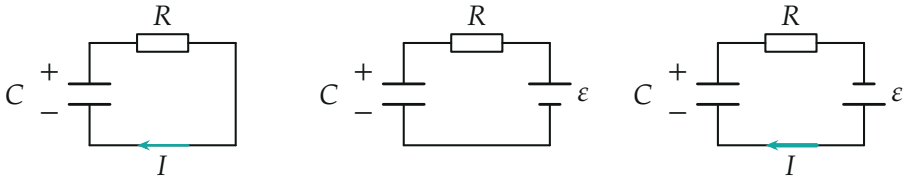
(знак v здесь сохранён: при движении влево q меняет знак). Ток $I = (q/C - Blv)/R$ спадает к нулю за время порядка $\tau \sim RC/(1+\kappa)$; условие $DBl \gg RCU_0$ означает, что путь $v\tau$, пройденный за это время, много меньше D.

Пункт 2. Скорость перед первым столкновением. Подставим в

$mv + Blq = \text{const}$ начало ($v = 0$, $q = CU_0$) и конец полёта ($v = v_1$, $q = CBlv_1$):

$$mv_1 + B^2l^2C\,v_1 = BlCU_0 \quad\Longrightarrow\quad v_1 = \frac{CU_0Bl}{m + B^2l^2C} = \frac{CU_0Bl}{m(1+\kappa)}.$$

3. Столкновение со стенкой. Пусть перед n-м столкновением скорость по модулю v_n, перемычка летит вправо к W_2 (для стенки W_1 все знаки зеркальны). Заряд равен $q_n = CBlv_n$. После удара скорость стала $-v_n$, заряд прежний; ЭДС сменила знак и теперь складывается с напряжением конденсатора — пойдёт ток, который тормозит перемычку и перезаряжает конденсатор (рисунок).



Цепь: конденсатор, резистор, перемычка-источник. а) начало; б) конец полёта, $U_C = \varepsilon$, ток равен нулю; в) сразу после удара ЭДС сменила знак и складывается с U_C, ток $I = (U_C + \varepsilon)/R$ перезаряжает конденсатор.

Дальше процесс установится снова: $q = CBl\,v$, где $v = -v_{n+1}$ — скорость, с которой перемычка летит к другой стенке. Запишем $mv + Blq = \text{const}$ сразу после удара и в конце установления:

$$m(-v_n) + Bl\cdot CBlv_n = m(-v_{n+1}) + Bl\cdot CBl(-v_{n+1}).$$

Сократим на m: $-v_n + \kappa v_n = -v_{n+1} - \kappa v_{n+1}$, откуда

$$v_{n+1} = v_n\,\frac{1-\kappa}{1+\kappa} = v_n\,\frac{m - B^2l^2C}{m + B^2l^2C}.$$

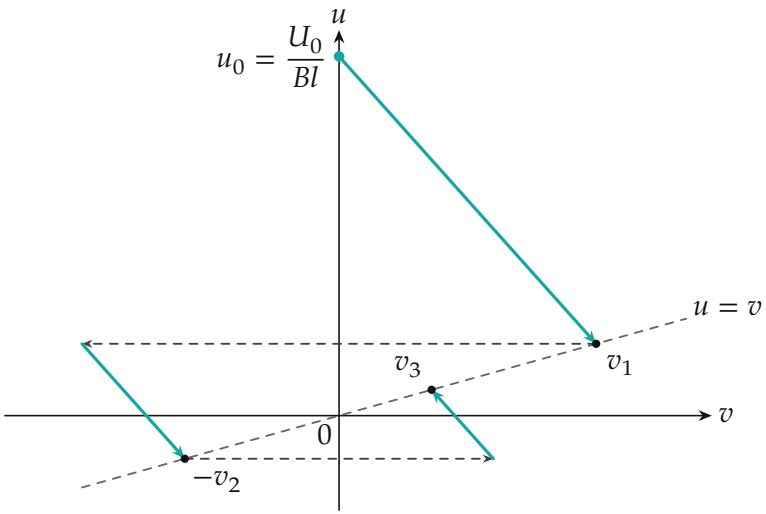
Так как $\kappa < 1$ (условие $m > B^2l^2C$), множитель положителен и меньше единицы: перемычка после удара летит от стенки, к которой подлетала, и долетает до противоположной — столкновения чередуются:

W_2, W_1, W_2,... При $\kappa > 1$ она была бы отброшена обратно к той же стенке.

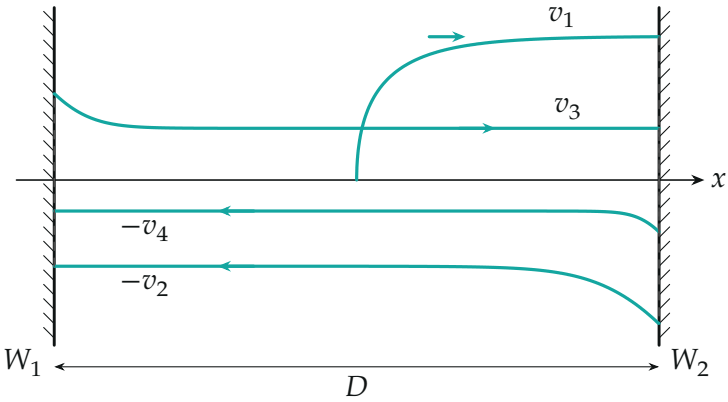
Пункт 3. Скорости образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1-\kappa}{1+\kappa}$:

$$v_n = v_1\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^{n-1} = \frac{CU_0Bl}{m+B^2l^2C}\left(\frac{m-B^2l^2C}{m+B^2l^2C}\right)^{n-1}.$$

Равносильная запись: $v_n = CU_0Bl\,\dfrac{(m-B^2l^2C)^{n-1}}{(m+B^2l^2C)^n}$.



Состояния системы на плоскости $(v;\,u)$, $u = q/(CBl)$, при $\kappa = \frac{1}{4}$. Между ударами точка идёт по прямой с наклоном $-1/\kappa$ (из $mv + Blq = const$) до диагонали $u = v$ (ток равен нулю); удар — горизонтальный перенос $v \to -v$. Каждый такой шаг умножает $|v|$ на $\dfrac{1-\kappa}{1+\kappa}$.



Проекция скорости перемычки в зависимости от координаты ($\kappa = \frac{1}{4}$): после удара скорость быстро падает с v_n до v_{n+1}, дальше постоянна до следующей стенки. Масштаб установления увеличен.

Проверка. Размерность: $\kappa = B^2l^2C/m$ безразмерна, $[CU_0Bl/m] =$ Кл $\cdot$ (Н $\cdot$ с/Кл)/кг $=$ м/с. Предел $C \to 0$: $\kappa \to 0$, $v_n \approx v_1$ — маленький конденсатор перемычку не тормозит. Случай $\kappa = 1$: $v_2 = 0$ — после первого удара перемычка остаётся у стенки. Энергия: механическая плюс энергия конденсатора равна $\frac{1}{2}mv_n^2(1+\kappa)$ и от удара к удару уменьшается в $\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^2 < 1$ раз — её уносит тепло в резисторе, как и должно быть. Численное моделирование уравнений цепи и движения (пример $m = B = l = 1$, $C = 0{,}25$) подтвердило $v_1 = 0{,}6$ и $v_2, v_3, \dots = 0{,}36;\ 0{,}216;\ 0{,}1296$, а стенки чередовались $W_2, W_1, W_2, \dots$

Смысл: каждый удар заставляет конденсатор перезарядиться, и на это уходит часть скорости перемычки — как постоянная доля при каждом отскоке.

Ответ. 1) W_2 (первой будет стенка, к которой направлена сила Ампера, — правая на рисунке), дальше стенки чередуются; 2) $v_1 = \dfrac{CU_0Bl}{m + B^2l^2C}$; 3) $v_n = v_1\left(\dfrac{m - B^2l^2C}{m + B^2l^2C}\right)^{n-1}$.