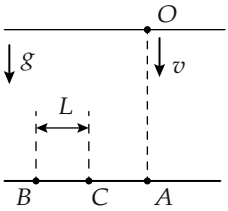
Уронили в речку шарик

Задача 5. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 5] «Уронили в речку шарик». Из точки O на поверхности воды в реку бросают одинаковые маленькие металлические шарики (см. рис.). Отпущенный без начальной скорости шарик упал на дно в точке B, а шарик, запущенный вертикально вниз с известной скоростью v в точку C. Расстояние $BC = L$. Найдите горизонтальную составляющую скорости второго шарика при ударе о дно u_x. Считайте, что при движении на шарик со стороны воды действует сила, прямо пропорциональная скорости движения шарика относительно воды и направленная против этой скорости. Скорость течения не зависит от глубины, а дно горизонтально. Силу Архимеда не учитывать.



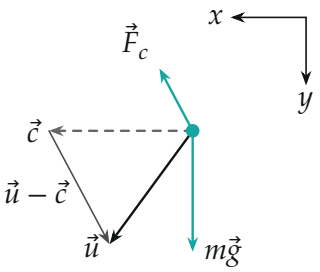
▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление зависит от скорости шарика относительно воды, а вода течёт, поэтому в уравнении движения кроме тяжести есть ещё и течение. Главная идея: перейти в инерциальную систему отсчёта, движущуюся с установившейся скоростью падения шарика $\vec{W}$. В ней течение и тяжесть взаимно уничтожаются, остаётся только сопротивление $-k\vec{u}'$, линейное по скорости. Тогда шарик движется по прямой, а смещение за время t равно начальной скорости, умноженной на один и тот же множитель $\varphi(t)$ для всех шариков. Дальше всё сводится к сравнению двух шариков и подобию треугольников. Класс задачи: линейное сопротивление, суперпозиция движений, смена системы отсчёта.

Обозначения. Ось x направим вдоль течения (на рисунке это влево — первый шарик сносит в сторону B), ось y — вертикально вниз, начало — точка O. Скорость течения $\vec{c} = (c; 0)$, она одна на всех глубинах. Сила

сопротивления $-km(\vec{u}-\vec{c})$, где $\vec{u}$ — скорость шарика, m — его масса, k — постоянная. Введём

$$w=\frac{g}{k},\qquad \vec{W}=(c;\,w),\qquad \varphi(t)=\frac{1-e^{-kt}}{k},\qquad f(t)=t-\varphi(t).$$

t_1 и t_2 — время полёта первого и второго шариков до дна, H — глубина.



Шарик в потоке: на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сопротивление $\vec{F}_c=-km(\vec{u}-\vec{c})$; оно направлено против скорости относительно воды $\vec{u}-\vec{c}$.

1. Уравнение движения и система S'. Второй закон Ньютона для шарика в проекциях на оси:

$$\dot{u}_x=-k(u_x-c),\qquad \dot{u}_y=g-ku_y=-k(u_y-w).$$

При $\vec{u}=\vec{W}$ обе правые части равны нулю: тяжесть уравновешена сопротивлением по вертикали, а по горизонтали шарик не отстаёт от воды. Поэтому $\vec{W}$ — скорость, к которой шарик стремится в глубокой реке. Перейдём в систему S', движущуюся с постоянной скоростью $\vec{W}$ (инерциальную; выбрана затем, чтобы пропали и течение, и тяжесть). Для $\vec{u}\,'=\vec{u}-\vec{W}$ ускорение то же, и

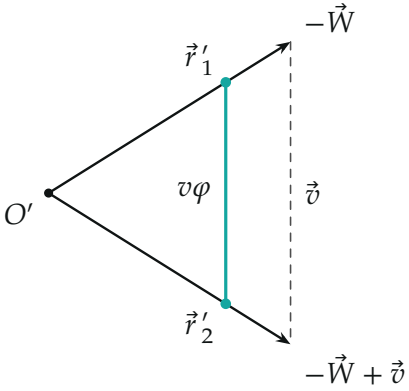
$$\dot{\vec{u}}\,'=-k\vec{u}\,',\qquad \vec{u}\,'(t)=\vec{u}\,'_0e^{-kt},\qquad \vec{r}\,'(t)=\vec{u}\,'_0\,\varphi(t),$$

где $\vec{r}\,'(t)=\int_0^t\vec{u}\,'\,dt'$ — смещение в S'. Траектория в S' — отрезок прямой вдоль $\vec{u}\,'_0$, и все шарики за одно и то же время проходят доли пути $\varphi(t)$ от своих начальных скоростей.

2. Два шарика. В момент запуска $\vec{u}\,'_0 = \vec{u}_0 - \vec{W}$: у первого шарика $\vec{u}_0 = 0$, у второго $\vec{u}_0 = (0;\, v)$. Положение в системе берега: $\vec{r}(t) = \vec{W}t + \vec{r}\,'(t) = \vec{W}(t-\varphi) + \vec{u}_0\varphi$, то есть

$$\vec{r}_1(t) = \vec{W}f(t), \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{W}f(t) + (0;\, v\varphi(t)).$$

Обратите внимание на два следствия. Первый шарик движется по прямой OB с направлением $\vec{W}$. А второй в любой момент находится строго под первым, на расстоянии $v\varphi(t)$: в S' оба смещения получены умножением скоростей на φ, а скорости различаются на $\vec{v} = (0;\, v)$.

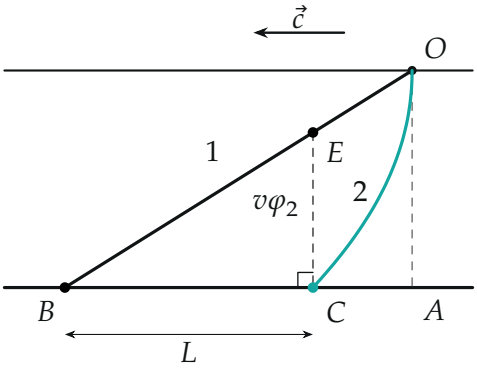


В системе S' скорости $-\vec{W}$ и $-\vec{W}+\vec{v}$ различаются на $\vec{v}$; за время t_2 смещения $\vec{r}\,'_1 = -\vec{W}\varphi$ и $\vec{r}\,'_2 = (-\vec{W}+\vec{v})\varphi$ (точки) направлены вдоль этих скоростей, пропорциональны им с общим множителем $\varphi(t_2)$ и различаются на $v\varphi$ по вертикали.

3. Момент удара второго шарика о дно. Второй шарик достигает дна в точке C в момент t_2. Первый за то же время t_2 оказывается в точке E на отрезке OB (рисунок) — ровно над C на расстоянии $EC = v\varphi(t_2)$. Дно горизонтально, $BC = L$, значит, треугольник EBC прямоугольный с прямым углом при C, а его гипотенуза EB лежит на прямой OB, то есть параллельна $\vec{W}$. Горизонтальный катет относится к вертикальному, как составляющие $\vec{W}$:

$$\frac{BC}{EC} = \frac{L}{v\varphi(t_2)} = \frac{c}{w} \quad\Longrightarrow\quad c = \frac{wL}{v\varphi(t_2)}.$$

То же в координатах: за время t_1 первый шарик проходит $x = cf(t_1)$, $y = wf(t_1) = H$; второй за t_2 — $x = cf(t_2)$, $y = wf(t_2) + v\varphi(t_2) = H$; вычитая, получаем $c(f(t_1) - f(t_2)) = L$ и $w(f(t_1) - f(t_2)) = v\varphi(t_2)$, откуда то же отношение c/w.



Траектории в системе берега (течение направлено влево): первый шарик идёт по прямой OB, второй — по кривой OC; точка E — положение первого шарика в момент падения второго (над C). Треугольник EBC подобен треугольнику со сторонами c и w.

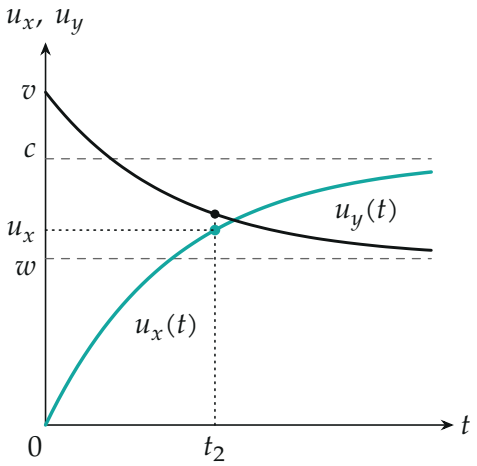
4. Горизонтальная скорость при ударе. Из уравнения для u_x при $u_{0x} = 0$:

$$u_x(t) = c(1 - e^{-kt}) = ck\varphi(t),$$

так как $k\varphi = 1 - e^{-kt}$. Подставим c из пункта 3 и $kw = g$:

$$u_x = u_x(t_2) = k\varphi(t_2) \cdot \frac{wL}{v\varphi(t_2)} = \frac{kwL}{v} = \frac{gL}{v}.$$

Множитель $\varphi(t_2)$ сократился, поэтому не нужны ни k, ни c, ни глубина H, ни времена падения.



Проекции скорости второго шарика: u_x растёт к скорости течения c, u_y убывает от v к w (здесь $v > w$). Точка при t_2 — момент удара; искомая величина u_x.

Проверка. Размерность: $[gL/v] = \dfrac{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}}{\text{м/с}} = \text{м/с}$. Предел $v \to \infty$: $u_x \to 0$ — очень быстрый шарик достигает дна почти мгновенно и не успевает набрать горизонтальную скорость, как и должно быть. Знак: $u_x > 0$ — вдоль течения, шарик подхватывается водой. Численная проверка на python: при $k = 1$, $c = 1{,}6$, $w = 1$, $v = 2$, $t_1 = 3$ получены $t_2 = 1{,}318$, $L = 2{,}343$ и $u_x(t_2) = 1{,}1715$, а $gL/v = 1{,}1715$ (ещё два набора параметров — совпадение до 15 знаков).

Смысл: линейное сопротивление не смешивает движения вдоль и поперёк: смещение за любое время — сумма вкладов, пропорциональных начальной скорости, поэтому добавка вертикальной скорости v сдвигает второй шарик ровно вниз на $v\varphi$, а горизонталь потом находится из подобия.

Ответ. $u_x = \dfrac{gL}{v}$ (вдоль течения).