Пружина

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, практический тур, задача 1] «Пружина».

Определите количество N витков во всей пружине и коэффициент жёсткости k_1 одного её витка. Проверьте, выполняется ли закон Гука при растяжении пружины силой, не превышающей $m_0 g$, где m_0 — масса выданного вам груза. Часть витков пружины находится внутри непрозрачного экрана, разбирать который запрещено.

Оборудование: пружина с экраном, груз, штатив, весы, линейка, миллиметровая бумага для построения графиков (на бланке).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это экспериментальная задача на последовательное соединение пружин. Пружину из N одинаковых витков можно считать N последовательно соединёнными «пружинками-витками» жёсткости k_1: сила в каждом витке одна и та же, а удлинения складываются. Поэтому жёсткость пружины из $N - n$ рабочих витков

$$k_{\text{пр}} = \frac{k_1}{N-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_{\text{пр}}} = \frac{N}{k_1} - \frac{n}{k_1}.$$

Главная идея: величина $1/k_{\text{пр}}$ линейно зависит от числа n выключенных витков. Измерив жёсткость при нескольких n, по наклону прямой находим k_1, а по точке, где прямая пересекает ось n (там $1/k_{\text{пр}} = 0$, то есть $n = N$), — полное число витков N, не заглядывая под экран.

Обозначения. N — число витков всей пружины; n — число витков, на которое пружина укорочена; $k_{\text{пр}}$ — жёсткость рабочей части; k_1 — жёсткость одного витка; L — длина видимой (внешней) части пружины; M — показание весов; F — сила натяжения пружины.

1. Почему $k_{\text{пр}} = k_1/(N-n)$. Растянем пружину силой F. Пружина невесома по сравнению с грузом, поэтому каждый виток растянут той же силой F и удлиняется на F/k_1 (закон Гука для витка). Удлинения рабочих витков складываются:

$$\Delta L = (N-n)\frac{F}{k_1} \quad \Rightarrow \quad k_{\text{пр}} = \frac{F}{\Delta L} = \frac{k_1}{N-n}.$$

Укороченные n витков (за пластиной с крючком) не растягиваются и в ΔL не входят.

2. Установка и измерение силы. Число рабочих витков меняем, перемещая пластину, к которой крепится крючок. Пружину с грузом закрепляем на штативе рядом с линейкой, под груз ставим весы (рис. 1). Опуская муфту штатива, ослабляем натяжение пружины, и груз всё сильнее давит на весы.

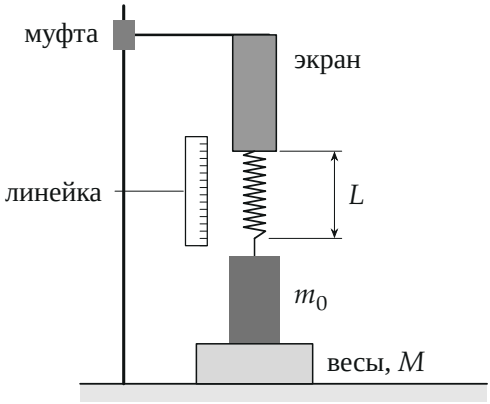

Рис. 1. Схема опыта: пружина выходит из-под экрана, груз m_0 стоит на весах; длину L видимой части меряем линейкой.

Груз в равновесии: второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикаль, $F + N_в - m_0 g = 0$, где $N_в = Mg$ — сила реакции весов (её и показывают весы). Отсюда сила натяжения пружины

$$F = (m_0 - M)\, g.$$

Максимальная сила, когда груз висит, не касаясь весов, — $F = m_0 g$; так мы и проверим закон Гука во всём требуемом диапазоне.

3. Закон Гука и жёсткость при данном n. При фиксированном n снимаем зависимость длины L видимой части от F. Для $n = 6$ организаторы получили точки рис. 2. Они ложатся на прямую $F = k_6\,(L - L_н)$, где $L_н \approx 4{,}0$ см — длина ненагруженной видимой части: *закон Гука выполняется* при всех силах до $m_0 g \approx 1{,}8$ Н. Наклон прямой — жёсткость: методом наименьших квадратов по точкам графика $k_6 \approx 26$ Н/м,

в таблице организаторов 25,7 Н/м (расхождение 2 % — это точность считывания графика).

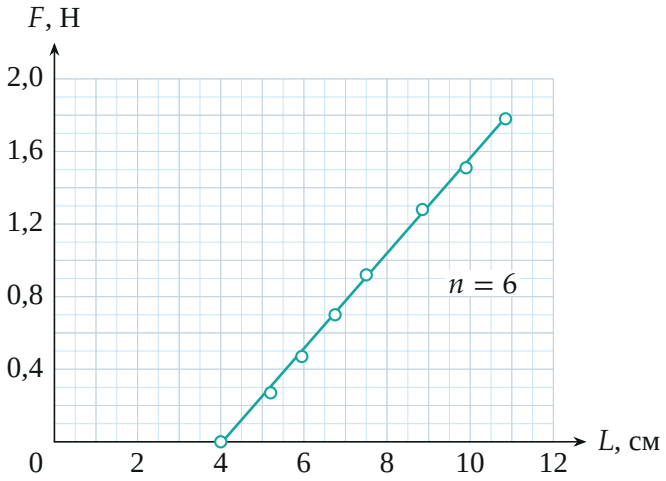

Рис. 2. Зависимость силы натяжения от длины видимой части пружины при $n = 6$ (точки организаторов). Точки на прямой — закон Гука выполняется.

4. Жёсткости при разных n**.** Повторяем пункт 3 для пяти положений пластины:

n	1	6	11	21	31
$k_{\text{пр}}$, Н/м	24,5	25,7	27,8	34,0	42,4
$1/k_{\text{пр}}$, 10^{-3} м/Н	40,8	38,9	36,0	29,4	23,6

Чем больше витков выключено, тем жёстче пружина — так и должно быть по формуле пункта 1.

5. Обработка: прямая $1/k_{\text{пр}}(n)$**.** Строим $1/k_{\text{пр}}$ от n (рис. 3). Точки лежат на прямой, что подтверждает модель «витки последовательно». Метод наименьших квадратов (python) даёт

$$\frac{1}{k_{\text{пр}}} = (42{,}0 - 0{,}591\,n)\cdot 10^{-3}\ \text{м/Н}.$$

Сравним с формулой пункта 1: наклон равен $-1/k_1$, свободный член —

N/k_1. Отсюда

$$k_1 = \frac{1}{0{,}591 \cdot 10^{-3}} \approx 1690 \text{ Н/м}, \qquad N = \frac{42{,}0}{0{,}591} \approx 71.$$

Графически N — это точка, где продолженная прямая пересекает ось n: при $n = N$ рабочих витков не осталось и пружина бесконечно жёсткая.

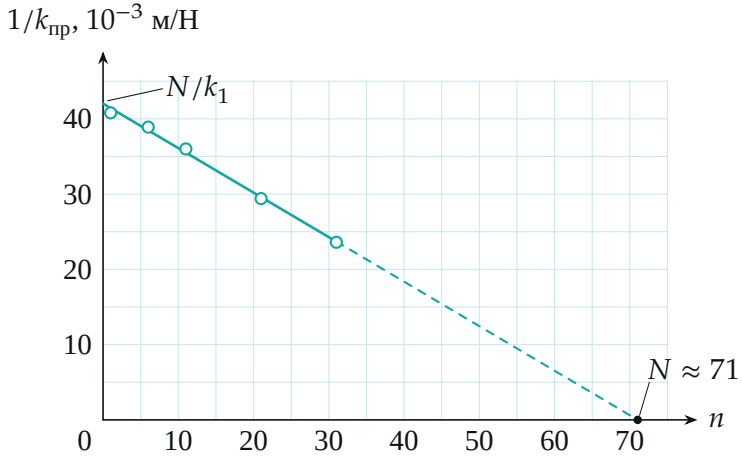

Рис. 3. Обратная жёсткость от числа выключенных витков. Наклон прямой $-1/k_1$, отрезок на оси ординат N/k_1; продолжение прямой (пунктир) пересекает ось n при $n = N$.

6. Погрешность. Случайная погрешность наклона по методу наименьших квадратов — около 4 %; к ней добавляется погрешность каждой жёсткости (считывание длины L линейкой с точностью 1 мм при растяжениях 5–7 см и наклон прямой $F(L)$) — ещё около 5–10 %. Итого $k_1 = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^3$ Н/м. Число витков определяется отношением свободного члена к наклону, ошибки которых в методе наименьших квадратов связаны; разброс проведения прямой даёт $N = 71 \pm 3$.

7. Второй способ найти N — счёт витков снаружи. Пусть L_0 — длина части пружины от точки крепления внутри экрана до нижнего края экрана, L_1 — длина выступающей части, на которой мы считаем m витков (рис. 4). Вся пружина растянута одинаково (сила в каждом витке

одна), поэтому на виток приходится одна и та же длина:

$$\frac{L_0 + L_1}{N} = \frac{L_1}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{N} + \frac{L_0}{N} \cdot \frac{1}{L_1}.$$

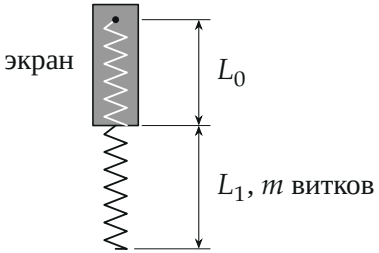

Рис. 4. Второй способ: под экраном длина L_0, снаружи L_1 и m видимых витков. Шаг витков всюду одинаков.

Растягивая всю пружину разными силами, получаем пары $(L_1; m)$. График в осях $1/L_1$, $1/m$ — прямая, отсекающая на оси $1/m$ значение $1/N$. Организаторы этим способом получили $N = 69$, а по жёсткости всей пружины $k_N = 24{,}5$ Н/м — $k_1 = k_N N \approx 1690$ Н/м. Это в пределах погрешности совпадает с основным способом.

Обратите внимание. Жёсткость одного витка в N раз *больше* жёсткости пружины, а не меньше: при последовательном соединении складываются податливости $1/k$, а не жёсткости.

Соберём ответ. Закон Гука выполняется при $F \le m_0 g$ (зависимость $F(L)$ линейна). $k_1 = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^3$ Н/м, $N = 71 \pm 3$.

Проверка. Для $n = 1$ формула пункта 1 даёт $k_{\text{пр}} = 1690/70 \approx 24{,}1$ Н/м, измерено 24,5 Н/м; для $n = 31$: $1690/40 \approx 42{,}3$ Н/м, измерено 42,4 Н/м — модель описывает все точки. Независимый счёт витков (пункт 7) даёт $N = 69$ и $k_1 \approx 1690$ Н/м.

Ответ. $N \approx 71$ (организаторы: 72, вторым способом 69); $k_1 = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^3$ Н/м (≈ 1690 Н/м); закон Гука при $F \le m_0 g$ выполняется.