Сироп

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, практический тур, задача 2] «Сироп».

Определите удельную теплоёмкость пятидесятипроцентного раствора сахара при температуре 50–60 °C.

Примечание: пятидесятипроцентным раствором называется раствор, половину массы которого составляет растворённое вещество. Удельная теплоёмкость лабораторного стекла 840 Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·°C).

Оборудование: мерная колба объёмом 50 мл, мультиметр с термопарой, весы, секундомер, стакан с водой, стакан с сахарным песком, стакан из пенопласта (термостат), стакан с «носиком», ложечка для размешивания раствора, горячая вода по требованию, миллиметровая бумага для построения графиков (на бланке), салфетки.

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача на метод сравнения скоростей остывания. Колба (пикнометр) с горячей жидкостью отдаёт теплоту воздуху; мощность теплоотдачи зависит только от разности температур колбы и комнаты и от формы колбы, но не от того, что налито внутрь. Главная идея: нальём в одну и ту же колбу до одной и той же метки сначала воду, потом сироп и сравним скорости остывания *при одной и той же температуре*. Теплоотдача в этот момент одинакова, поэтому скорость остывания обратно пропорциональна теплоёмкости содержимого — и неизвестный коэффициент теплоотдачи сократится.

Обозначения. $c_в$, $m_в$ — удельная теплоёмкость и масса воды; $c_р$, $m_р$ — то же для раствора; $c_с$, $m_с$ — для стекла колбы; t — температура содержимого, $t_0 = 20$ °C — температура комнаты; τ — время; α — коэффициент теплоотдачи колбы, Вт/°C; $\beta = \Delta t/\Delta\tau$ — скорость остывания (по модулю).

1. Установка и измерение. Колбу с горячей жидкостью ставим на стол, термопару — в центр жидкости (рис. 1), каждую минуту записываем показание мультиметра. Сначала — вода, налитая до метки 50 мл, затем — сироп до той же метки, нагретый на 5–10 °C выше той температуры, при которой будем сравнивать.

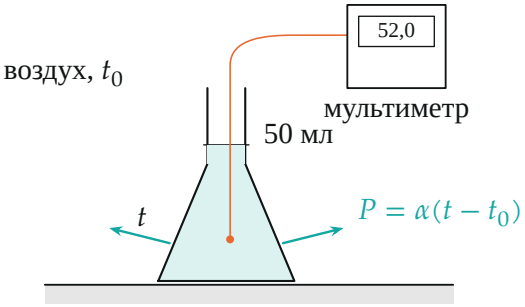

Рис. 1. Колба с горячей жидкостью и термопарой. Теплоотдача в воздух $P = \alpha(t - t_0)$ зависит только от температуры колбы.

Результаты организаторов (вода и сироп):

τ, мин	0	1	2	3	4	5	7	9	14	16	19	24
$t_в$, °C	60	59	58	57	56	54,5	52,5	51	47	46	44	41
$t_р$, °C	62	60,5	59	58	56	55	53	51	47	46	43,5	40,5

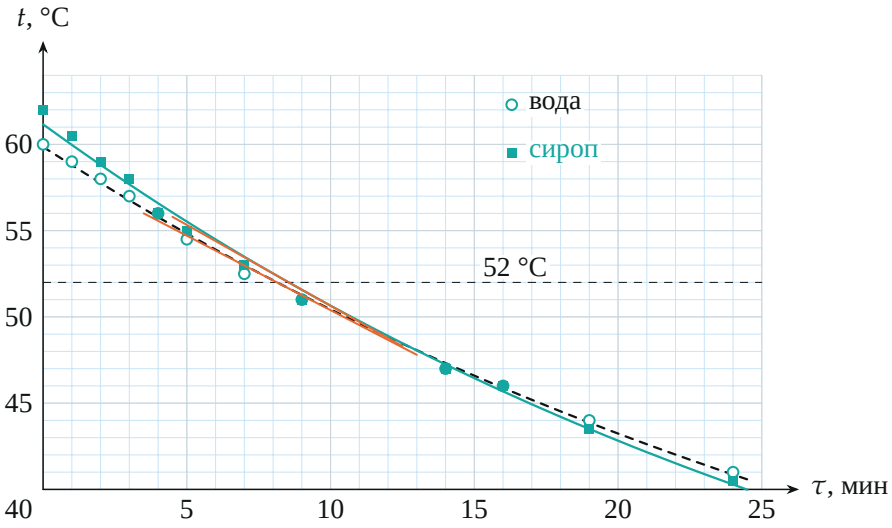

Рис. 2. Остывание колбы с водой (кружки, пунктир) и с сиропом (квадраты, сплошная). Кривые — закон $t - t_0 = Ae^{-\tau/T}$ по методу наименьших квадратов; красные отрезки — касательные в точке $t = 52$ °C.

2. Тепловой баланс колбы с водой. За малое время $\Delta\tau$ колба с водой остывает на Δt; закон сохранения энергии для системы «вода + стекло колбы» за $\Delta\tau$: вся потерянная внутренняя энергия ушла в воздух,

$$(c_в m_в + c_с m_с)\,\Delta t = \alpha\,(t - t_0)\,\Delta\tau \quad \Rightarrow \quad \beta_в = \frac{\alpha\,(t - t_0)}{c_в m_в + c_с m_с}.$$

Чем горячее колба, тем быстрее она остывает — кривая остывания выпуклая, и скорость надо брать при определённой температуре, а не среднюю за опыт.

3. Тепловой баланс колбы с сиропом. Колба та же и налита до той же метки, значит, при той же температуре t та же теплоотдача $\alpha(t - t_0)$:

$$(c_р m_р + c_с m_с)\,\beta_р = \alpha\,(t - t_0).$$

Делим равенство пункта 2 на это — α и $t - t_0$ сокращаются:

$$c_р m_р + c_с m_с = (c_в m_в + c_с m_с)\frac{\beta_в}{\beta_р},$$

$$c_р = \frac{c_в m_в}{m_р}\cdot\frac{\beta_в}{\beta_р} + \frac{c_с m_с}{m_р}\Big(\frac{\beta_в}{\beta_р} - 1\Big).$$

Второе слагаемое — вклад стекла — умножено на $\beta_в/\beta_р - 1$, а это отношение близко к единице (см. ниже), поэтому стекло почти не влияет на ответ.

4. Массы. Вода до метки: $m_в = 50$ г. Сироп готовим из 50 г сахара и 50 г воды, размешиваем до полного растворения, наливаем до метки и взвешиваем: $m_р = 61{,}1 \pm 0{,}1$ г (плотность сиропа 1,22 г/см^3).

5. Скорости остывания при 52 °C. На графиках $t(\tau)$ (рис. 2) проводим касательные в точке $t = 52$ °C. Чтобы касательная не зависела от руки, аппроксимируем каждую серию законом остывания $t - t_0 = A\,e^{-\tau/T}$ (скорость остывания пропорциональна $t - t_0$, как в пункте 2) методом наименьших квадратов для $\ln(t - t_0)$; скорость остывания $\beta = (t - t_0)/T$,

при 52 °C $t - t_0 = 32$ °C.

$$\text{вода: } \frac{1}{T} = 0{,}0270 \text{ мин}^{-1}, \quad \beta_в = 32 \cdot 0{,}0270 = 0{,}86 \frac{\text{°C}}{\text{мин}} = 0{,}0144 \frac{\text{°C}}{\text{с}};$$

$$\text{сироп: } \frac{1}{T} = 0{,}0295 \text{ мин}^{-1}, \quad \beta_р = 0{,}94 \frac{\text{°C}}{\text{мин}} = 0{,}0157 \frac{\text{°C}}{\text{с}}.$$

Второй способ — без модели: по точкам, соседним с 52 °C (от 5 до 9 мин), $\beta_в \approx (54{,}5-51)/4 = 0{,}88$ °C/мин, $\beta_р \approx (55-51)/4 = 1{,}00$ °C/мин; отношение 0,88 против 0,91 по модели. Сироп остывает чуть быстрее воды.

6. Удельная теплоёмкость сиропа. Отношение скоростей $\beta_в/\beta_р = 0{,}0144/0{,}0157 \approx 0{,}91$. Пренебрегая стеклом (оценка ниже),

$$c_р = \frac{c_в m_в}{m_р} \cdot \frac{\beta_в}{\beta_р} = \frac{4200 \cdot 50}{61{,}1} \cdot 0{,}91 \approx 3{,}1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}.$$

Стекло: даже при массе колбы $m_с \approx 30$ г второе слагаемое пункта 3 равно $\frac{840 \cdot 30}{61{,}1} \cdot (0{,}91-1) \approx -37$ Дж/(кг·°C), чуть больше 1 % — меньше погрешности, отбрасываем.

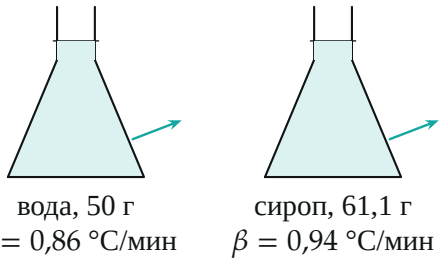

Рис. 3. Сравнение: та же колба, тот же объём, та же температура — одинаковая теплоотдача. Больше скорость остывания — меньше теплоёмкость содержимого.

7. Погрешность. Основная — в скоростях остывания: касательная к кривой по 12 точкам с шагом показаний 0,5 °C определяется примерно

с точностью 5 %. В ответ входит отношение двух скоростей, поэтому $\varepsilon \approx 2 \cdot 5\,\% = 10\,\%$; погрешность масс (0,2 %) и вклад стекла (1 %) малы. Оба способа пункта 5 (0,88 и 0,91) расходятся на 3 % — в пределах этой оценки.

Обратите внимание. Скорости надо сравнивать при одинаковой температуре: теплоотдача пропорциональна $t - t_0$, и при разных температурах $\alpha(t - t_0)$ не сократится. Поэтому сироп и нагревают выше 52 °C — чтобы его кривая прошла через ту же температуру. И ещё: при почти равных скоростях остывания теплоёмкость сиропа заметно меньше, чем у воды, потому что 50 мл сиропа тяжелее 50 мл воды.

Соберём ответ. $c_\text{р} = \dfrac{c_\text{в} m_\text{в}}{m_\text{р}} \cdot \dfrac{\beta_\text{в}}{\beta_\text{р}} = (3{,}1 \pm 0{,}3) \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C). У организаторов 3000 ± 300 — скорости остывания взяты касательными на глаз; в пределах погрешности это то же.

Проверка. Размерность: Дж/(кг · °C) · кг/кг — верно. Предел: для воды вместо сиропа ($m_\text{р} = m_\text{в}$, $\beta_\text{р} = \beta_\text{в}$) формула даёт $c_\text{в}$. Оценка по смеси: если бы теплоёмкости складывались, $0{,}5 \cdot 4200 + 0{,}5 \cdot 1250 \approx 2700$ Дж/(кг·°C) (сахар ≈ 1250); раствор между сахаром и водой, ближе к воде — разумно.

Коэффициент теплоотдачи колбы по воде: $\alpha = \beta_\text{в} c_\text{в} m_\text{в} / (t - t_0) = 0{,}0144 \cdot 210/32 \approx 0{,}09$ Вт/°C (у организаторов 0,12 Вт/°C при $\beta_\text{в} = 0{,}017$ °C/с); в ответ он не входит.

Ответ. $c_\text{р} = (3{,}1 \pm 0{,}3) \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C).