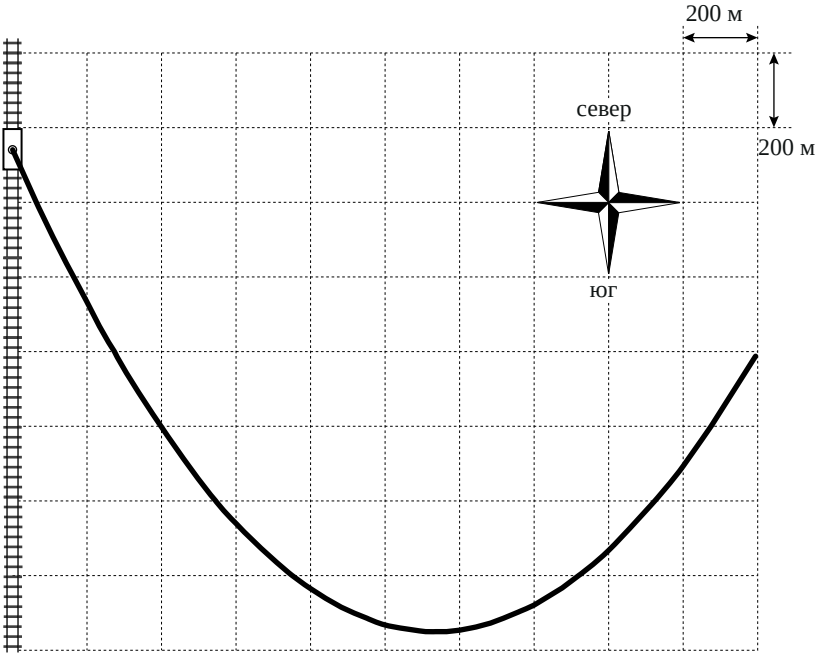
Паровоз

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 1] «Паровоз».

При проведении аэрофотосъёмки местности в кадр попал шлейф дыма от паровоза, начавшего своё движение из состояния покоя с постоянным ускорением $a = 0{,}05$ м/с^2 по прямому участку железной дороги. На фотографии виден весь шлейф от самого начала движения. Одной клетке соответствует расстояние 200 м. Считая скорость ветра постоянной, определите:



1. В каком направлении двигался паровоз?
2. Под каким углом α к железной дороге дул ветер?
3. Скорость ветра v_0.
4. Минимальную скорость ветра $v_{\min}$ относительно паровоза.
5. Время движения паровоза τ от начала движения до момента съёмки.

6. Расстояние s, которое прошёл паровоз от начала движения до момента съёмки.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на относительность движения. Дым, вылетев из трубы, дальше просто летит вместе с воздухом. Значит, в системе отсчёта воздуха весь дым неподвижен и лежит вдоль траектории паровоза *относительно воздуха*. На снимке шлейф сдвинут ветром целиком, но форма у него та же: шлейф — это траектория паровоза в системе ветра. Относительно воздуха паровоз движется равномерно поперёк дороги и равноускоренно вдоль неё — как камень, брошенный в поле тяжести, поэтому шлейф — парабола.

Обозначения. $\vec{v}_0$ — скорость ветра относительно земли, α — угол между ней и дорогой; $\vec{u}$ — скорость паровоза, $u = at$; t — время от начала движения; $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}_0$ — скорость паровоза относительно воздуха. Начало координат O — самая старая точка шлейфа (дым, выпущенный в момент $t = 0$); ось x — поперёк дороги к дороге (на запад), ось y — вдоль дороги на север (рис. 2). V — нижняя точка шлейфа, П — паровоз в момент съёмки.

1. Закон сложения скоростей. Скорость паровоза относительно воздуха

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}_0.$$

Ветер дует под углом α к дороге, на северо-восток (это видно из шага 3); поэтому в проекциях на оси

$$w_x = v_0 \sin\alpha, \qquad w_y = at - v_0 \cos\alpha.$$

Поперёк дороги паровоз удаляется от точки O относительно воздуха равномерно, вдоль — равноускоренно (рис. 2).

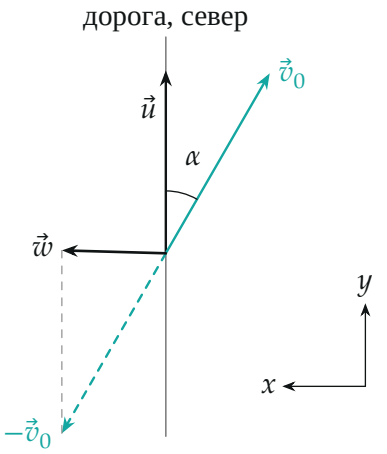


Рис. 2. Треугольник скоростей. Скорость паровоза относительно воздуха $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v}_0)$. Нарисован момент $t_V = v_0 \cos\alpha / a$, когда $u = v_0 \cos\alpha$ и $\vec{w}$ перпендикулярна дороге.

2. Уравнение шлейфа. Интегрируем проекции скорости (начальное положение паровоза относительно воздуха — точка O):

$$x = v_0 \sin\alpha \cdot t, \qquad y = \frac{at^2}{2} - v_0 \cos\alpha \cdot t.$$

Исключив $t = \dfrac{x}{v_0 \sin\alpha}$, получаем уравнение шлейфа на снимке:

$$y = \frac{a\,x^2}{2v_0^2 \sin^2\alpha} - x \operatorname{ctg}\alpha.$$

Это парабола. Её нижняя точка V — там, где $w_y = 0$, то есть при $t_V = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{a}$:

$$x_V = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{a}, \qquad y_V = -\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2a}.$$

Пункт 1. Направление движения. Шлейф на снимке опускается от точки O к югу, проходит нижнюю точку и поднимается к паровозу. Значит, w_y сменила знак: сначала паровоз отставал от ветра вдоль дороги,

потом обогнал его. Это возможно, только если паровоз разгоняется *на север*, туда же, куда дует составляющая ветра вдоль дороги. При движении на юг было бы $w_y = -at - v_0 \cos\alpha < 0$ всё время, и шлейф шёл бы на юг монотонно, без нижней точки. Ответ: паровоз ехал с юга на север, на снимке он у верхнего конца шлейфа.

Пункт 2. Угол α. Снимаем с рисунка (рис. 3) смещения нижней точки V относительно O: по горизонтали $x_V \approx 4{,}35$ клетки ≈ 870 м, по вертикали $|y_V| \approx 3{,}75$ клетки ≈ 750 м. Из формул шага 2

$$\frac{|y_V|}{x_V} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\cdot 750}{870} \approx 1{,}72, \qquad \alpha \approx 30^\circ.$$

Проверка вторым способом: в точке O паровоз стоял, $\vec{w} = -\vec{v}_0$, и касательная к шлейфу в O идёт против ветра. На снимке она наклонена к дороге примерно на 30° — ветер дул на северо-восток под углом 30° к дороге.

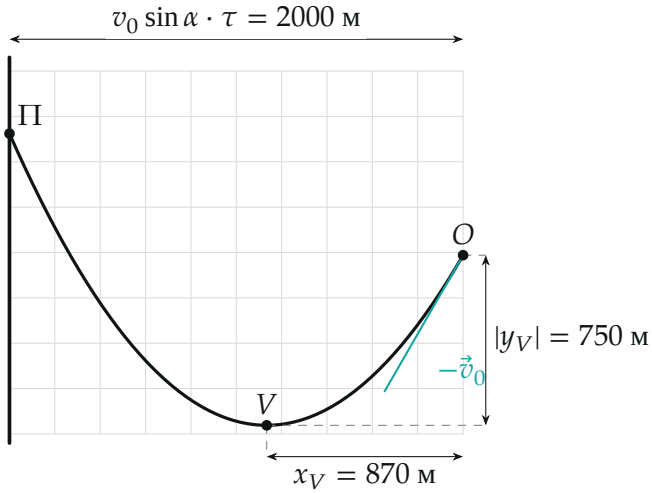


Рис. 3. Шлейф, построенный по найденным $\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 10$ м/с, $\tau = 400$ с (клетка — 200 м), совпадает со снимком. O — дым момента $t = 0$, V — нижняя точка, П — паровоз. Бирюзовая касательная в O направлена против ветра.

Пункт 3. Скорость ветра. Из $|y_V| = \dfrac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2a}$:

$$v_0 = \frac{\sqrt{2a|y_V|}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0{,}05 \cdot 750}}{0{,}866} \text{ м/с} = \frac{8{,}66}{0{,}866} \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}.$$

Пункт 4. Минимальная скорость ветра относительно паровоза. Скорость воздуха относительно паровоза равна $-\vec{w}$, её модуль

$$|\vec{w}| = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + (at - v_0 \cos \alpha)^2}.$$

Первое слагаемое постоянно, второе обращается в ноль в момент $t_V = \frac{v_0 \cos \alpha}{a} = 173$ с (паровоз проходит точку V; $t_V < \tau$, момент наступил). Поэтому

$$v_{\min} = v_0 \sin \alpha = 10 \cdot 0{,}5 \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

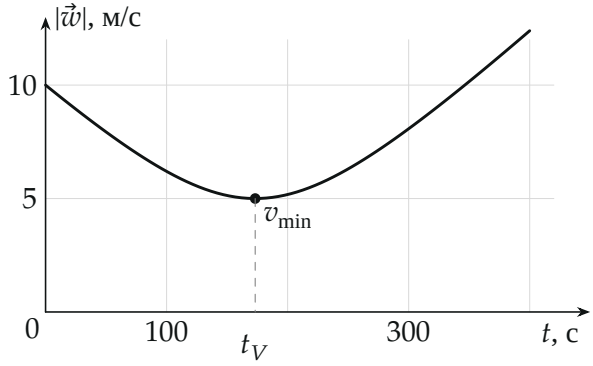


Рис. 4. Скорость воздуха относительно паровоза: сначала 10 м/с (ветер), минимум 5 м/с в момент $t_V = 173$ с, к моменту съёмки — 12,3 м/с.

Пункт 5. Время движения. Поперёк дороги шлейф протянулся от паровоза до точки O на 10 клеток, то есть на 2000 м (рис. 3). По шагу 2 это $x(\tau) = v_0 \sin \alpha \cdot \tau$:

$$\tau = \frac{2000 \text{ м}}{v_0 \sin \alpha} = \frac{2000}{5} \text{ с} = 400 \text{ с}.$$

Пункт 6. Пройденный путь. Равноускоренное движение из покоя:

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{0{,}05 \cdot 400^2}{2}\ \text{м} = 4000\ \text{м}.$$

Обратите внимание: расстояние $s = 4000$ м не видно на снимке напрямую. Паровоз за это время уехал на север на 4 км, но и дым, выпущенный в начале, отнесло ветром на север на $v_0 \cos\alpha \cdot \tau = 3464$ м — на снимке паровоз выше точки O лишь на их разность.

Проверка. Разность $4000 - 3464 = 536$ м $\approx 2{,}7$ клетки — на снимке паровоз и в самом деле выше точки O примерно на 2,7 клетки. Нижняя точка в момент $t_V = 173$ с лежит между началом и концом движения, как и на снимке. Размерность: $\frac{v_0^2}{a}$ — $\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = $ м.

Ответ. 1) с юга на север; 2) $\alpha \approx 30°$ ($\operatorname{ctg}\alpha \approx 1{,}72$); 3) $v_0 = 10$ м/с; 4) $v_{\min} = 5$ м/с; 5) $\tau = 400$ с; 6) $s = 4000$ м.