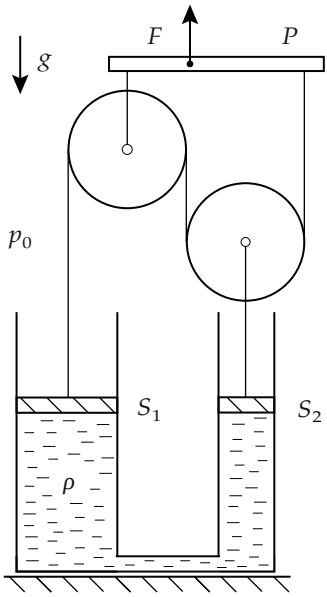
# Блоки и цилиндры

**Задача 2.** [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 2] «Блоки и цилиндры».

В двух сообщающихся сосудах, площади сечения которых $S_1$ и $S_2$, находится жидкость плотностью $\rho$. Сосуды герметично закрыты поршнями, которые могут перемещаться под действием системы блоков и нерастяжимых нитей, связанных с рычагом $P$ (см. рис.). Вначале нити не натянуты и не провисают, а поршни соприкасаются с жидкостью. Рычаг медленно смещают вверх на небольшое расстояние $h$ так, что он остаётся горизонтальным, а нити вертикальными.




1. В предположении, что $S_1 > S_2$, определите, в каких направлениях и на какие расстояния сместятся поршни. Какую силу $F_1$ необходимо прикладывать к рычагу, чтобы удерживать его после смещения на расстояние $h$?
2. Какая сила $F_2$ потребуется для перемещения рычага вверх на расстояние $h$ при $S_2 = 2S_1$?

*Массами рычага, блоков, нитей и поршней можно пренебречь. Трения нет. Сосуды от подставки не отрываются. Давление паров жидкости*

*гораздо меньше атмосферного давления $p_0$. Ускорение свободного падения $g$.*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на связи (нерастяжимая нить, несжимаемая жидкость) и равновесие лёгких тел. Левый блок висит на рычаге и поднимается вместе с ним; правый блок — подвижный, на нём висит правый поршень. Две связи — длина нити и объём жидкости — однозначно задают смещения поршней по смещению рычага. Затем условия равновесия невесомых поршней дают натяжение нити, а натяжение — силу на рычаг. Во втором пункте связи противоречат друг другу, и выход один — жидкость отрывается от поршней.

**Обозначения.** Точки нити (рис. 2): $B$ — крепление к левому поршню, $A$ и $C$ — точки схода с левого блока, $D$ и $F$ — с правого, $E$ — крепление к рычагу. $T$ — натяжение нити; $x$ — подъём правого поршня, $y$ — опускание левого; $p_1$, $p_2$ — давления жидкости под левым и правым поршнями.

**Пункт 1.**

**1. Связь через жидкость.** Жидкость несжимаема, её объём не меняется: сколько ушло из одного сосуда, столько пришло в другой. Поэтому поршни движутся в разные стороны, и

$$S_1 y = S_2 x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{S_2}{S_1} x.$$

Какой поршень пойдёт вверх, покажет знак ответа; предположим, что правый.

**2. Связь через нить.** Рычаг поднялся на $h$ — вместе с ним на $h$ поднялись левый блок (точки $A$, $C$) и точка $E$. Правый блок висит на правом поршне и поднялся на $x$ (точки $D$, $F$). Изменения длин вертикальных участков нити (рис. 2):

$$\Delta(AB) = h + y, \qquad \Delta(CD) = h - x, \qquad \Delta(EF) = h - x.$$

Длина нити постоянна (дуги на блоках не меняются), сумма изменений

равна нулю:

$$h + y + 2(h - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3h + y.$$

**3. Смещения.** Подставляем $y$ из шага 1:

$$x\left(2 - \frac{S_2}{S_1}\right) = 3h \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3hS_1}{2S_1 - S_2}, \qquad y = \frac{3hS_2}{2S_1 - S_2}.$$

При $S_1 > S_2$ знаменатель $2S_1 - S_2 > 0$: $x > 0$ и $y > 0$, предположение верно. *Правый поршень $S_2$ поднимается на $x$, левый $S_1$ опускается на $y$.* Оба смещения больше $h$: $x - h = \frac{h(S_1+S_2)}{2S_1-S_2} > 0$, и нити $CD$, $EF$ действительно укорачиваются.

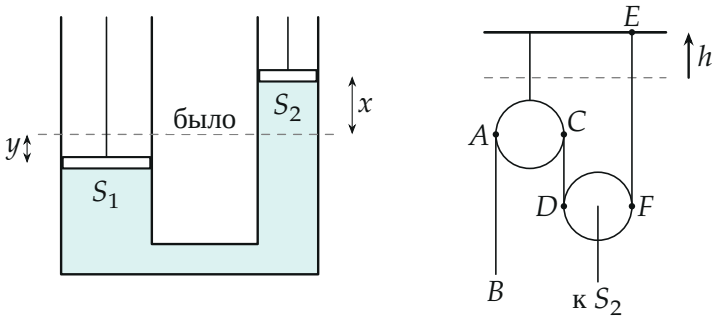



*Рис. 2. Слева: левый поршень опустился на $y$, правый поднялся на $x$ (пунктир — прежний общий уровень). Справа: нить B–A–C–D–F–E; рычаг и левый блок поднялись на $h$, правый блок — вместе с правым поршнем на $x$.*

**4. Давления.** Вначале нити не натянуты, поршни невесомы — под обоими давление $p_0$, и поверхности жидкости на одном уровне. Теперь правая поверхность выше левой на $x + y$. Гидростатика (давление в жидкости растёт с глубиной на $\rho g$ на метр):

$$p_2 = p_1 - \rho g(x + y).$$

**5. Равновесие поршней.** Поршни невесомы и движутся медленно — сумма сил на каждый равна нулю (рис. 3). Левый поршень: нить тянет вверх с силой $T$, жидкость давит вверх $p_1 S_1$, атмосфера давит вниз $p_0 S_1$.

Правый поршень висит на подвижном блоке, нить охватывает блок, и блок тянет поршень вверх силой $2T$:

$$T + p_1 S_1 = p_0 S_1, \qquad 2T + p_2 S_2 = p_0 S_2.$$

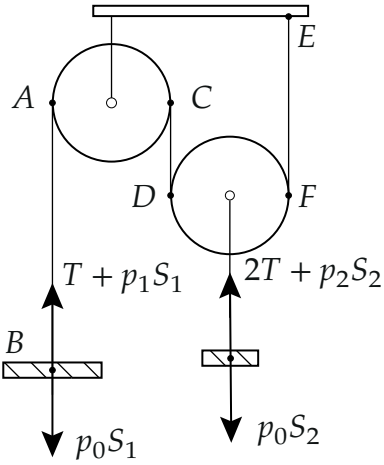



*Рис. 3. Силы на поршни: вверх — нить и давление жидкости, вниз — атмосфера. Левый поршень тянет одна нить ($T$), правый — подвижный блок ($2T$).*

**6. Натяжение.** Из первого уравнения $p_0 - p_1 = \frac{T}{S_1}$, из второго $p_0 - p_2 = \frac{2T}{S_2}$. Вычитаем и используем шаг 4, $p_1 - p_2 = \rho g(x+y)$:

$$\frac{2T}{S_2} - \frac{T}{S_1} = \rho g(x+y) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\rho g(x+y)\, S_1 S_2}{2S_1 - S_2}.$$

С $x + y = \dfrac{3h(S_1 + S_2)}{2S_1 - S_2}$:

$$T = \frac{3\rho g h\, S_1 S_2 (S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)^2}.$$

**7. Сила на рычаг.** Рычаг невесом. Вниз его тянут: ось левого блока — двумя ветвями нити ($2T$) и нить в точке $E$ ($T$). Чтобы держать рычаг, нужна сила вверх

$$F_1 = 3T = \frac{9\rho g h\, S_1 S_2 (S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)^2}.$$

Ответ годится, пока под левым поршнем $p_1 = p_0 - \frac{T}{S_1} > 0$, — для этого смещение $h$ и должно быть небольшим.

**Второй способ — энергия.** Рычаг движется медленно, работа силы $F$ идёт в потенциальную энергию жидкости; работа атмосферы $p_0 S_1\, dy - p_0 S_2\, dx = 0$, так как $S_1\, dy = S_2\, dx$. Объём $S_1 y$ перешёл со средней высоты $-\frac{y}{2}$ на $+\frac{x}{2}$:

$$E = \rho g S_1 y \cdot \frac{x+y}{2} = \frac{9\rho g h^2 S_1 S_2 (S_1 + S_2)}{2(2S_1 - S_2)^2},$$

$$F_1 = \frac{dE}{dh} = \frac{9\rho g h S_1 S_2 (S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)^2}.$$

Совпало. Сила растёт пропорционально $h$, как у пружины.

**Пункт 2.** $S_2 = 2S_1$**.** Связь шага 3 даёт $x(2S_1 - S_2) = 3hS_1$, то есть $0 = 3hS_1$: при $h \neq 0$ движение *с поршнями на жидкости* невозможно. Наглядно: при подъёме рычага на $h$ нить требует $2x - y = 3h$, а жидкость — $y = 2x$, $2x - y = 0$. Значит, поднять рычаг можно только оторвав жидкость от поршня (поршней).

Под оторвавшимся поршнем — пустота: давление паров по условию пренебрежимо, $p \approx 0$. Тянем рычаг: натяжение растёт, давление под поршнями падает до нуля, и жидкость отрывается (рис. 4). Тогда для левого поршня $T = p_0 S_1$, для правого $2T = p_0 S_2 = 2p_0 S_1$ — одно и то же натяжение $T = p_0 S_1$, при любом положении поршней. Сила на рычаг

$$F_2 = 3T = 3p_0 S_1.$$

Она не зависит от $h$: дальше рычаг можно поднимать с той же силой.

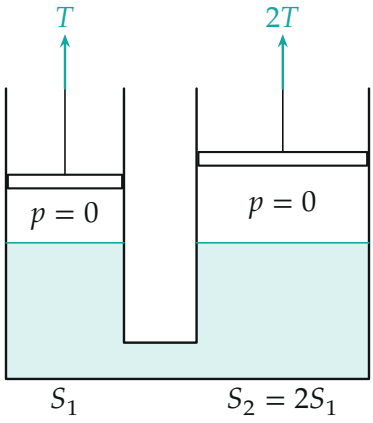



*Рис. 4. Пункт 2: жидкость оторвалась от поршней, под ними пустота ($p \approx 0$), уровни жидкости одинаковы. Сверху на поршни давит атмосфера: $T = p_0 S_1$, $2T = p_0 S_2$.*

Обратите внимание: формула пункта 1 при $S_2 \to 2S_1$ даёт $F_1 \to \infty$ — это и есть признак того, что жидкость «не пускает» рычаг, пока не оторвётся. Реальная сила ограничена атмосферным давлением: $3p_0 S_1$.

**Проверка.** Размерность $F_1$: $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{м}^6}{\text{м}^4} = \text{Н}$. Предел $S_2 \to 0$: правый сосуд пропал, $F_1 \to 0$ — левый поршень опускается на $y \to 0$, жидкость не поднимается. Знак: при $S_1 > S_2$ правый уровень выше, правому поршню нужна бóльшая разность давлений, и он идёт вверх — согласуется с $x > 0$.

**Ответ.** 1) правый поршень ($S_2$) поднимается на $x = \dfrac{3hS_1}{2S_1 - S_2}$, левый ($S_1$) опускается на $y = \dfrac{3hS_2}{2S_1 - S_2}$; $F_1 = \dfrac{9\rho g h\, S_1 S_2 (S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)^2}$; 2) $F_2 = 3p_0 S_1$.