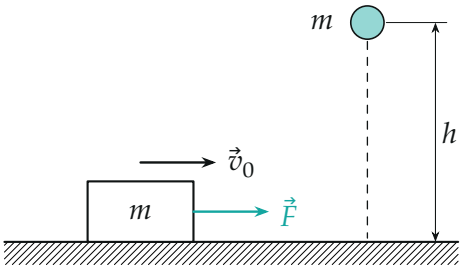
Прилетевший пластилин

Задача 3. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 3] «Прилетевший пластилин».

Кусок пластилина массой m, упав без начальной скорости с некоторой высоты, прилип к бруску такой же массы, движущемуся по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью $v_0 = 4$ м/с под действием постоянной горизонтальной силы. Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}2$. Определите скорость v_1 бруска через время $t_1 = 1$ с после начала падения пластилина. Постройте график зависимости скорости бруска v от времени t после начала падения пластилина для двух случаев: а) с высоты $h_a = 10$ м; б) с высоты $h_b = 25$ м, указав на нём координаты характерных точек.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Поясняющий рисунок: брусок едет с постоянной скоростью v_0, сверху без начальной скорости падает пластилин той же массы.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока пластилин летит, он на брусок никак не действует, и брусок едет с постоянной скоростью v_0. При ударе пластилин резко прижимает брусок к полу: за короткое время удара сила нормального давления огромна, а с ней и сила трения скольжения. Поэтому за время удара брусок теряет часть горизонтального импульса скачком. Это задача на неупругий удар с трением: главная идея — импульс трения за удар равен μ, умноженному на импульс силы реакции опоры, а импульс реакции опоры гасит вертикальный импульс пластилина. После удара брусок с пластилином тормозится, потому что сила тяги рассчитана на один брусок, а трение теперь вдвое больше.

Обозначения. τ — момент удара (время падения), u — скорость пластилина перед ударом, v_k — скорость бруска с пластилином сразу после удара; ось x — горизонтально по движению бруска, ось y — вертикально вверх.

1. Сила тяги. До удара брусок движется равномерно, поэтому по второму закону Ньютона для бруска в проекциях на оси x и y: $F - \mu N_0 = 0$, $N_0 = mg$. Отсюда сила тяги

$$F = \mu mg.$$

По условию она постоянна и после удара остаётся той же.

2. Падение пластилина. Свободное падение без начальной скорости с высоты h:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad u = g\tau = \sqrt{2gh}.$$

Для случая а) $\tau_a = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ с, $u_a \approx 14{,}1$ м/с; для случая б) $\tau_b = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ с, $u_b \approx 22{,}4$ м/с. В обоих случаях $\tau > t_1 = 1$ с: через секунду после начала падения пластилин ещё не долетел, и

$$v_1 = v_0 = 4 \text{ м/с}.$$

3. Удар: закон изменения импульса. Запишем закон изменения импульса системы «брусок + пластилин» за время удара Δt векторно:

$$\Delta\vec{p} = (\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} + 2m\vec{g})\,\Delta t.$$

Сила тяжести и сила тяги конечны, их импульсы за малое Δt стремятся к нулю. Остаются ударные силы N и $F_{\text{тр}}$ (рис. 1). Проекция на ось y: вертикальная скорость пластилина u гасится до нуля,

$$0 - (-mu) = \int N\,dt \quad \Rightarrow \quad \int N\,dt = mu.$$

Пока брусок скользит, в каждый момент $F_{\text{тр}} = \mu N$, значит, импульс трения $\int F_{\text{тр}}\,dt = \mu mu$. Проекция на ось x (пластилин горизонтальной

скорости не имел):

$$2mv_k - mv_0 = -\mu mu \quad \Rightarrow \quad v_k = \frac{v_0 - \mu u}{2}.$$

Формула верна, пока $v_k \geq 0$, то есть $\mu u \leq v_0$: брусок не останавливается за время удара. Если $\mu u > v_0$, трение остановит брусок раньше, чем кончится удар, а дальше трение покоя не даст ему поехать назад — брусок «заклинивает», $v_k = 0$. Граничная высота:

$$\mu\sqrt{2gh} = v_0 \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{v_0^2}{2\mu^2 g} = \frac{16}{2 \cdot 0{,}04 \cdot 10} = 20 \text{ м}.$$

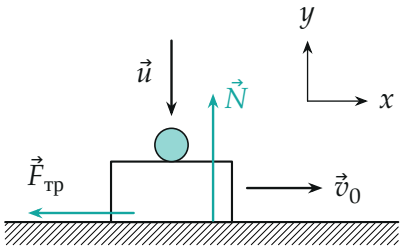


Рис. 1. Удар: большая сила реакции опоры $\vec{N}$ гасит вертикальную скорость пластилина, вместе с ней велика и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

4. После удара. Второй закон Ньютона для системы массой $2m$ в проекциях: по y $N = 2mg$, по x

$$2ma_x = F - \mu \cdot 2mg = \mu mg - 2\mu mg \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{\mu g}{2} = -1 \text{ м/с}^2.$$

Брусок тормозится равнозамедленно. Скорость при $t > \tau$ (пока брусок едет), с учётом $u = g\tau$:

$$v = v_k - \frac{\mu g}{2}(t - \tau) = \frac{v_0 - \mu g\tau - \mu gt + \mu g\tau}{2} = \frac{v_0 - \mu gt}{2}.$$

Высота выпала: после удара все графики ложатся на одну прямую $v =$

$(v_0 - \mu g t)/2$ (на рис. 2 — пунктир). Она обращается в нуль при

$$t_0 = \frac{v_0}{\mu g} = 2 \text{ с}.$$

Остановившись, брусок дальше покоится: сила тяги $\mu m g$ меньше максимальной силы трения покоя $2\mu m g$.

5. График а), $h_a = 10$ **м** $< h^*$**.** До $\tau_a = 1{,}41$ с $v = 4$ м/с. В момент удара скачок вниз до

$$v_k = \frac{4 - 0{,}2 \cdot 14{,}1}{2} \approx 0{,}59 \text{ м/с},$$

затем прямая до нуля в момент $t_0 = 2$ с, дальше $v = 0$.

6. График б), $h_b = 25$ **м** $> h^*$**.** До $\tau_b = 2{,}24$ с $v = 4$ м/с; пластилин прилетает позже t_0, и $\mu u_b = 4{,}47$ м/с $> v_0$: брусок останавливается прямо во время удара, скачок от 4 м/с до нуля, дальше $v = 0$.

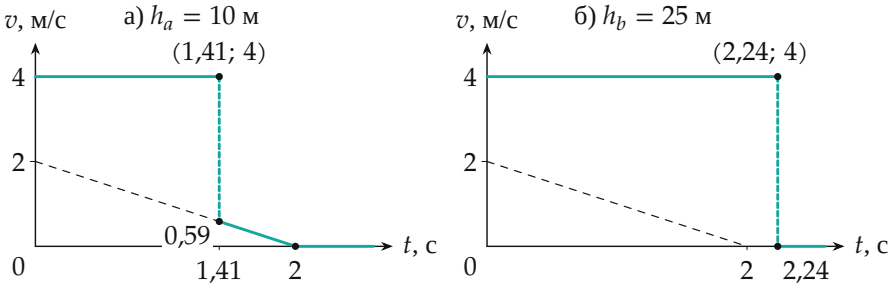


Рис. 2. Скорость бруска от времени. Сплошная бирюзовая линия — график, штрихом — скачок при ударе; чёрный пунктир — прямая $v = (v_0 - \mu g t)/2$, на которую ложится график после удара при любой высоте $h < 20$ м.

Обратите внимание. Трение при ударе нельзя считать равным $\mu \cdot 2mg$: за время удара сила реакции опоры намного больше веса, и именно она определяет импульс трения. И формула $v_k = (v_0 - \mu u)/2$ при $h > 20$ м дала бы отрицательную скорость — брусок «поехал бы назад», чего трение сделать не может.

Проверка. Размерность: μu и $\mu g t$ — скорости. Предел $\mu \to 0$: $v_k = v_0/2$ — обычный неупругий удар с горизонтальным сохранением им-

пульса, $a \to 0$. Второй способ для пункта 4: за всё время от 0 до t импульс сил по x равен $Ft - \mu mg\tau - \mu mu - 2\mu mg(t-\tau)$ (трение до удара, при ударе и после); с $F = \mu mg$ и $u = g\tau$ получаем $2mv - mv_0 = -\mu mgt$, то есть та же формула $v = (v_0 - \mu gt)/2$. Смысл: и при ударе, и после него трение «съедает» μg скорости на единицу времени падения, поэтому неважно, когда прилетел пластилин.

Ответ. $v_1 = 4$ м/с (при обеих высотах пластилин падает дольше 1 с). График: а) $v = 4$ м/с до $\tau_a = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ с, скачок до 0,59 м/с, затем линейно $v = (v_0 - \mu gt)/2$ до нуля при $t = 2$ с, дальше $v = 0$; б) $v = 4$ м/с до $\tau_b = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ с, затем скачком $v = 0$ (брусок останавливается при ударе, так как $h_b > v_0^2/(2\mu^2 g) = 20$ м).