Струйное нагревание

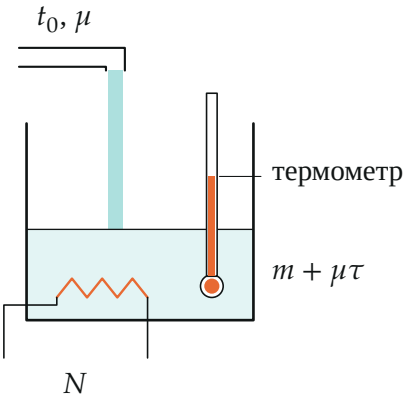
Задача 4. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 4] «Струйное нагревание».

В пустой теплоизолированный сосуд наливают воду при температуре $t_0 = 20$ °C струйкой с массовым расходом $\mu = 2{,}0$ г/с. Когда в сосуде оказывается $m = 100$ г воды, в нём включается нагреватель мощностью $N = 200$ Вт. Температура содержимого сосуда измеряется помещённым в него ртутным термометром. Определите:

1. Через какое время τ_1 с момента включения нагревателя температура воды в сосуде увеличится до $t_1 = 30$ °C?
2. До какой максимальной температуры $t_{\max}$ сможет нагреться содержимое сосуда?

Выведите зависимость скорости v подъёма столбика ртути термометра от времени τ с момента включения нагревателя, если на его шкале расстояние между отметками t_0 и t_1 равно $l = 2{,}0$ см. Определите скорость подъёма столбика при температуре t_1.

Удельная теплоёмкость воды равна $c = 4200$ Дж/(кг·°C). Процессы теплообмена происходят быстро, теплоёмкости термометра и сосуда малы.



Поясняющий рисунок: струйка холодной воды, нагреватель N и ртутный термометр в сосуде.

▲ **Решение. Что происходит.** Нагреватель греет воду, а струйка всё время подмешивает холодную воду при t_0. Чем горячее содержимое, тем больше теплоты уходит на догрев новых порций, и рост температуры замедляется. Это задача на тепловой баланс с растущей массой. Главная идея: сосуд теплоизолирован, поэтому вся теплота нагревателя с момента включения идёт на то, чтобы нагреть от t_0 до t *всю* воду, которая сейчас в сосуде, — и ту, что была, и ту, что прилилась.

Обозначения. τ — время с момента включения нагревателя; $t(\tau)$ — температура содержимого; $M(\tau) = m + \mu\tau$ — масса воды в сосуде; $\Delta\tau$ — малый промежуток времени, Δt — изменение температуры за него.

1. Тепловой баланс от включения до момента τ. В момент включения в сосуде m воды при t_0. К моменту τ в сосуде масса $m + \mu\tau$ при одной температуре t (теплообмен быстрый). Теплоизоляция и малая теплоёмкость сосуда и термометра означают: вся теплота нагревателя $N\tau$ пошла на нагрев воды, а вся вода в сосуде когда-то имела температуру t_0. Закон сохранения энергии для воды, оказавшейся в сосуде к моменту τ, между моментом включения и моментом τ:

$$N\tau = c\,(m + \mu\tau)\,(t - t_0).$$

Отсюда температура в любой момент

$$t(\tau) = t_0 + \frac{N\tau}{c\,(m + \mu\tau)}.$$

2. Время нагрева до t_1. Подставляем $t = t_1$ и решаем уравнение относительно τ_1:

$$N\tau_1 = c\,(m + \mu\tau_1)(t_1 - t_0) \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{mc\,(t_1 - t_0)}{N - \mu c\,(t_1 - t_0)},$$

$$\tau_1 = \frac{0{,}1 \cdot 4200 \cdot 10}{200 - 0{,}002 \cdot 4200 \cdot 10} = \frac{4200}{116} \approx 36 \text{ с}.$$

Знаменатель $N - \mu c(t_1 - t_0)$ — это мощность, которая остаётся на подъём температуры после догрева новой воды. Он положителен, значит, до

30 °C вода действительно нагреется.

3. Максимальная температура. Перепишем $t(\tau)$, поделив числитель и знаменатель на τ:

$$t - t_0 = \frac{N}{c\,(\mu + m/\tau)}.$$

С ростом τ слагаемое m/τ уменьшается, и температура растёт, но не бесконечно: при $\tau \to \infty$

$$t_{\max} = t_0 + \frac{N}{\mu c} = 20 + \frac{200}{8{,}4} \approx 44\ ^\circ\text{C}.$$

Физический смысл: при $t = t_{\max}$ вся мощность нагревателя уходит на догрев новой воды от t_0 до $t_{\max}$, $N = \mu c\,(t_{\max} - t_0)$, и на подъём температуры ничего не остаётся. Эта температура достигается асимптотически, за бесконечное время (рис. 1); тот же предел даёт обращение в нуль знаменателя в формуле для τ_1 при $t_1 \to t_{\max}$.

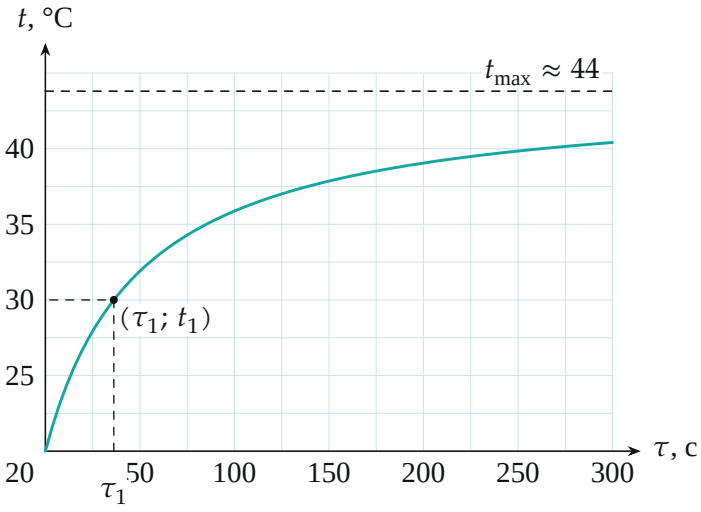


Рис. 1. Температура содержимого сосуда $t(\tau) = t_0 + N\tau/(c(m + \mu\tau))$, построена по вычисленным точкам. Кривая приближается к $t_{\max}$, но не достигает её.

4. Скорость роста температуры — баланс на малом промежутке. Рассмотрим малый промежуток $\Delta\tau$ после момента τ (рис. 2). За него нагреватель отдал $N\Delta\tau$; эта теплота пошла на две вещи: нагреть уже налитую массу $m + \mu\tau$ на Δt и нагреть прилившуюся порцию $\mu\Delta\tau$ от t_0 до t (её нагрев на лишние Δt — величина второго порядка малости, отбрасываем). Закон сохранения энергии за $\Delta\tau$:

$$N\Delta\tau = c\,(m + \mu\tau)\,\Delta t + c\,\mu\Delta\tau\,(t - t_0).$$

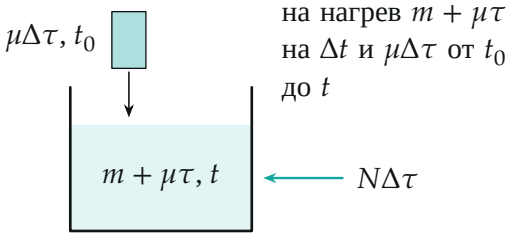


Рис. 2. Баланс за малый промежуток $\Delta\tau$: теплота нагревателя делится между уже налитой водой и новой порцией.

Подставим сюда $t - t_0$ из пункта 1:

$$c\,(m + \mu\tau)\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = N - \mu c \cdot \frac{N\tau}{c\,(m + \mu\tau)} = \frac{Nm}{m + \mu\tau},$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{Nm}{c\,(m + \mu\tau)^2}.$$

Второй способ — та же производная прямо из формулы $t(\tau)$ пункта 1: $\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\tau}{m + \mu\tau} = \dfrac{m}{(m + \mu\tau)^2}$, результат тот же.

5. Скорость столбика ртути. Шкала термометра равномерная: на $t_1 - t_0 = 10$ °C приходится $l = 2{,}0$ см, то есть столбик поднимается на $l/(t_1 - t_0)$ на каждый градус (рис. 3). Поэтому

$$v(\tau) = \frac{l}{t_1 - t_0} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{Nml}{c\,(t_1 - t_0)\,(m + \mu\tau)^2}.$$

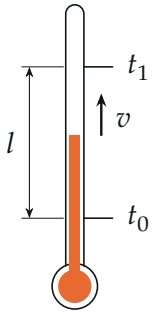


Рис. 3. Шкала термометра: отметкам t_0 и t_1 соответствует расстояние l.

В момент τ_1 масса воды $m + \mu\tau_1 = 0{,}1 + 0{,}002 \cdot 36{,}2 \approx 0{,}172$ кг, и

$$v(\tau_1) = \frac{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02}{4200 \cdot 10 \cdot 0{,}172^2} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с} = 0{,}32 \text{ мм/с}.$$

Скорость убывает как $1/(m + \mu\tau)^2$: в момент включения она $v(0) = Nl/(mc(t_1 - t_0)) \approx 0{,}95$ мм/с, к моменту τ_1 падает втрое (рис. 4).

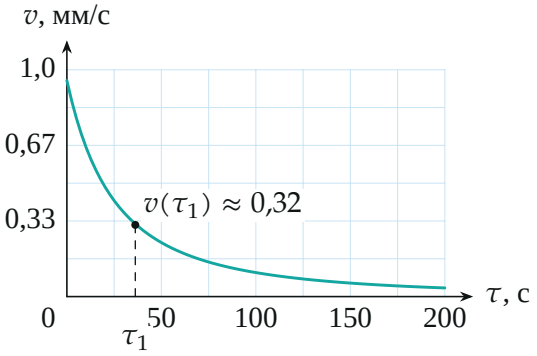


Рис. 4. Скорость подъёма столбика $v(\tau)$ по вычисленным точкам.

Обратите внимание. Нельзя считать, что вся мощность N идёт на нагрев постоянной массы: часть её всё время уходит на догрев притекающей холодной воды, и именно эта часть ограничивает температуру величиной $t_{\max}$.

Соберём ответ.

$$\tau_1 = \frac{mc\,(t_1 - t_0)}{N - \mu c\,(t_1 - t_0)} \approx 36\text{ с}, \qquad t_{\max} = t_0 + \frac{N}{\mu c} \approx 44\text{ °C},$$

$$v(\tau) = \frac{Nml}{c\,(t_1 - t_0)\,(m + \mu\tau)^2}, \qquad v(\tau_1) \approx 0{,}32\text{ мм/с}.$$

Проверка. Размерность: $[Nml/(c\,\Delta t\,M^2)] = $ Вт·кг·м/(Дж·кг^2)·кг = м/с. Предел $\mu \to 0$ (струйки нет): $t - t_0 = N\tau/(mc)$ — обычный нагрев постоянной массы, $t_{\max} \to \infty$, $v = \text{const}$, как и должно быть. Численно: при $\tau_1 = 36{,}2$ с из пункта 1 получаем $t = 20 + 200\cdot 36{,}2/(4200\cdot 0{,}172) = 30{,}0$ °C.

Физический смысл: струйка работает как «утечка» тепла, растущая с температурой, поэтому температура выходит на насыщение, а столбик ртути замедляется.

Ответ. 1) $\tau_1 = \dfrac{mc(t_1 - t_0)}{N - \mu c(t_1 - t_0)} \approx 36$ с; 2) $t_{\max} = t_0 + \dfrac{N}{\mu c} \approx 44$ °C; $v(\tau) = \dfrac{Nml}{c(t_1 - t_0)(m + \mu\tau)^2}$, при t_1: $v \approx 0{,}32$ мм/с.