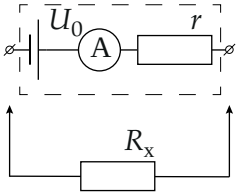
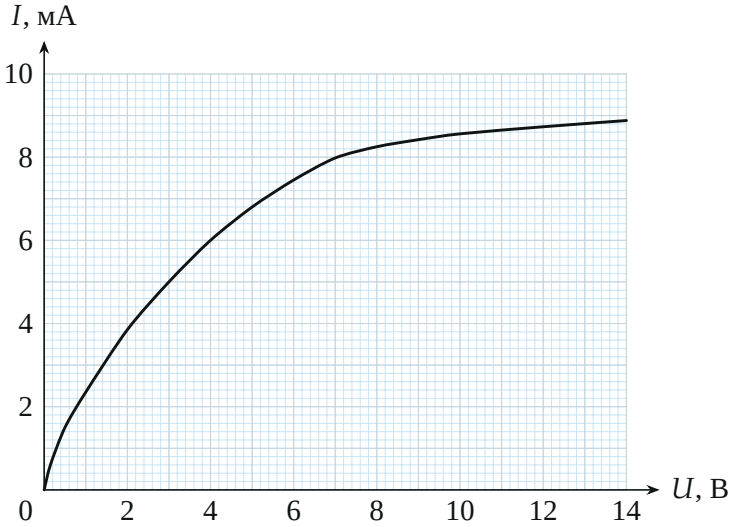
Нелинейные показания

Задача 5. [ВсОШ 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 5] «Нелинейные показания».

По упрощённой модели омметр состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0, резистора сопротивлением r и идеального амперметра (см. рис.). При подключении к омметру резистора сопротивлением R_x показания амперметра автоматически пересчитываются так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления подключённого резистора.



Омметр при подключении к нелинейному элементу Z, вольтамперная характеристика которого приведена ниже, показывает сопротивление $R_z = 800$ Ом. Если параллельно к элементу Z подключить резистор сопротивлением $R = 1{,}0$ кОм, омметр покажет значение $R_1 = 400$ Ом. Определите напряжение U_0 источника омметра и его сопротивление r. Найдите показания омметра R_2 при подключении к нему нелинейного элемента Z и резистора сопротивлением R, соединённых последовательно.



Примечание: необходимые для решения построения выполните на выданном отдельном бланке и сдайте его вместе с работой.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Омметр не знает, что подключено. Он измеряет ток I и показывает $R_{\text{пок}} = U/I$, где U — напряжение на подключённом участке; у линейного резистора это и есть его сопротивление, у нелинейного элемента — отношение U/I в той точке ВАХ, где он работает. Это задача на нелинейный элемент в цепи с источником: рабочая точка — пересечение ВАХ участка с нагрузочной прямой источника. Главная идея: каждое показание омметра — это луч $I = U/R_{\text{пок}}$ из начала координат; его пересечение с ВАХ даёт рабочую точку, а две рабочие точки задают нагрузочную прямую омметра, то есть U_0 и r.

Обозначения. U, I — напряжение на подключённом участке и ток через омметр; $I_Z(U)$ — ВАХ элемента Z (дана графиком); A, B, C — рабочие точки для Z, для $Z \parallel R$ и для $Z + R$ (рис. 2).

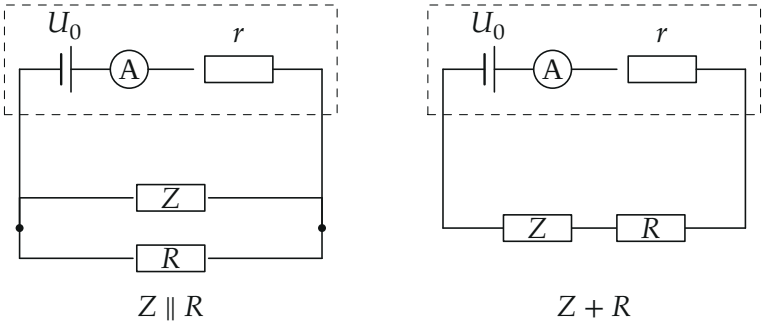


Рис. 1. Омметр с подключённым участком: Z и R параллельно (слева) и последовательно (справа).

1. Нагрузочная прямая омметра. Закон Ома для полной цепи — второе правило Кирхгофа для контура «источник — r — амперметр — подключённый участок»: источник идеален, амперметр идеален, поэтому

$$U = U_0 - rI \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{U_0 - U}{r}.$$

На графике $I(U)$ это прямая, которая пересекает ось I в точке U_0/r (ток короткого замыкания) и ось U в точке U_0 (ток равен нулю). Рабочая точка любого подключённого участка лежит одновременно на его ВАХ и на этой прямой.

2. Точка A: подключён только Z. Показание $R_z = U/I = 0{,}8$ кОм — значит, рабочая точка лежит на луче $I = U/(0{,}8\text{ кОм})$. Ищем на ВАХ точку с $U/I = 0{,}8$ кОм: при $U = 6$ В по графику $I = 7{,}5$ мА, и $6/7{,}5 = 0{,}8$. Итак, $A = (6\text{ В}; 7{,}5\text{ мА})$.

3. Точка B: Z и R параллельно. У параллельных элементов общее напряжение, а токи складываются (первое правило Кирхгофа для узла). Поэтому ВАХ участка $Z \parallel R$ получаем, прибавляя к току $I_Z(U)$ при каждом U ток через резистор U/R:

$$I_{\parallel}(U) = I_Z(U) + \frac{U}{R}.$$

Например, при $U = 2$ В: $3{,}85 + 2 = 5{,}85$ мА; при $U = 4$ В: $6{,}0 + 4{,}0 = 10{,}0$ мА. Показание $R_1 = 0{,}4$ кОм — луч $I = U/(0{,}4\text{ кОм})$; на

построенной кривой ему отвечает $U = 4$ В, $I = 10$ мА ($4/10 = 0{,}4$). Итак, $B = (4\text{ В}; 10\text{ мА})$.

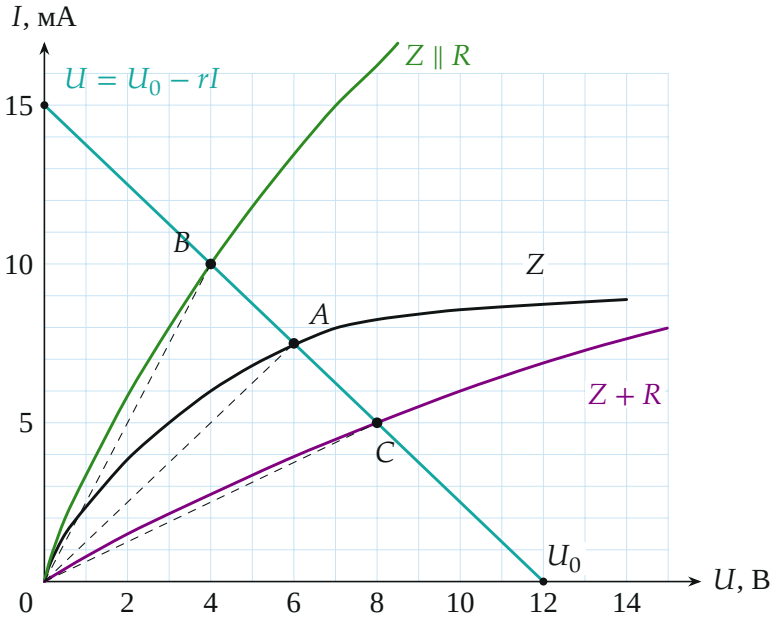


Рис. 2. ВАХ элемента Z (чёрная), участка $Z \parallel R$ (зелёная) и $Z + R$ (фиолетовая), построенные по точкам графика условия; бирюзовая — нагрузочная прямая омметра через A и B. Пунктир — лучи $I = U/R_{пок}$ для трёх показаний.

4. Напряжение источника и сопротивление. Обе точки A и B лежат на прямой $U = U_0 - rI$:

$$\begin{cases} 6 = U_0 - r \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-3}, \\ 4 = U_0 - r \cdot 10 \cdot 10^{-3}. \end{cases}$$

Вычитаем второе уравнение из первого: $2 = r \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}$, откуда $r = 800$ Ом $= 0{,}8$ кОм. Тогда $U_0 = 6 + 0{,}8 \cdot 7{,}5 = 12$ В. Графически — то же: прямая через A и B пересекает ось U при $U_0 = 12$ В и ось I при $U_0/r = 15$ мА.

5. Точка C: Z и R последовательно. У последовательных элементов общий ток, а напряжения складываются (второе правило Кирхгофа), по-

этому ВАХ участка строим, прибавляя к напряжению на Z при каждом токе напряжение на резисторе IR:

$$U_+(I) = U_Z(I) + IR.$$

Рабочая точка — пересечение этой кривой с нагрузочной прямой. Проверим подбором около пересечения на рис. 2: при $I = 5$ мА по ВАХ $U_Z = 3$ В, $U_+ = 3 + 5 = 8$ В, а нагрузочная прямая даёт $U = 12 - 0{,}8 \cdot 5 = 8$ В — совпало. При $I = 4{,}8$ мА: $U_+ \approx 7{,}6$ В $< 8{,}2$ В, при $I = 5{,}2$ мА: $U_+ \approx 8{,}4$ В $> 7{,}8$ В, так что пересечение единственно. Итак, $C = (8\text{ В}; 5\text{ мА})$, и омметр покажет

$$R_2 = \frac{U_C}{I_C} = \frac{8\text{ В}}{5\text{ мА}} = 1{,}6\text{ кОм}.$$

Обратите внимание. Показание омметра на нелинейном элементе — не «его сопротивление», а U/I в рабочей точке; поэтому для последовательного соединения $R_2 \neq R_z + R = 1{,}8$ кОм: ток стал меньше, элемент Z перешёл в другую точку ВАХ, где $U/I = 3/5 = 0{,}6$ кОм.

Соберём ответ. $U_0 = 12$ В, $r = 0{,}8$ кОм, $R_2 = 1{,}6$ кОм.

Проверка. Второй способ для r: идеальный омметр показывает сопротивление линейного резистора точно, значит, пересчёт тока в показание идёт по формуле $R_{\text{пок}} = U_0/I - r$. Подставим точку A: $12/7{,}5 - 0{,}8 = 1{,}6 - 0{,}8 = 0{,}8$ кОм $= R_z$; точку B: $12/10 - 0{,}8 = 0{,}4$ кОм $= R_1$; точку C: $12/5 - 0{,}8 = 1{,}6$ кОм $= R_2$. Все три показания согласованы.

Физический смысл: омметр «видит» нелинейный элемент через свою нагрузочную прямую, и показание зависит от того, что подключено вместе с элементом.

Ответ. $U_0 = 12$ В; $r = 0{,}8$ кОм; $R_2 = 1{,}6$ кОм.