Серый ящик

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Серый ящик».

В «сером» ящике (синий электронный компонент с тремя выводами) находится электрическая цепь, схема которой представлена на рис. 1. Цепь состоит из двух резисторов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$). Нумерация выводов «серого» ящика изображена на рис. 2.

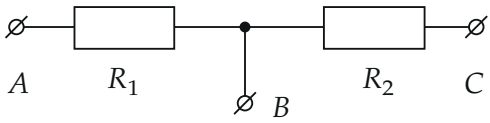

Рис. 1. Схема цепи в «сером» ящике.

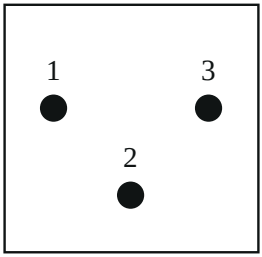

Рис. 2. Нумерация выводов «серого» ящика.

Определите сопротивление резисторов R_1 и R_2. Укажите соответствие точек A, B, C схемы номерам выводов «серого ящика».

Примечание: выданный вам источник питания содержит батарейку, напряжение которой U, и включенный последовательно с ней резистор сопротивлением $r = 1\,000$ Ом (рис. 3).

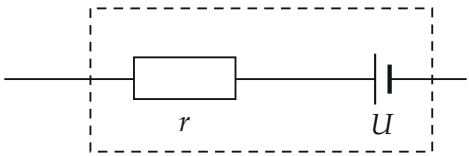

Рис. 3. Схема источника.

Оборудование: «серый» ящик, вольтметр (мультиметр в режиме вольтметра), источник питания.

Внимание: отрывать наклейки от мультиметра, а также вынимать из него щупы запрещается! Нарушившие это требование получат за выполнение задания 0 баллов!

▲ **Решение. Что происходит.** Измерить можно только напряжение, а сопротивления спрятаны. Вольтметр-мультиметр не идеальный: его сопротивление $R_\text{В}$ порядка килоом, как и r, — это видно, если подключить вольтметр прямо к источнику и затем через резистор: показание заметно падает. Значит, вольтметр в цепи — такой же резистор, и его сопротивление — ещё одна неизвестная. Три включения (вольтметр к источнику напрямую; последовательно с резистором; параллельно резистору) дают три уравнения закона Ома на три неизвестных U, $R_\text{В}$, R_1. Класс задачи — «чёрный ящик», цепи постоянного тока с неидеальным прибором.

Обозначения. U — напряжение батарейки; $R_\text{В}$ — сопротивление вольтметра; U_0, U_1, U_2 — показания вольтметра в трёх включениях (рис. 4); $x_1 = \frac{U_1}{U_0 - U_1}$, $x_2 = \frac{U_2}{U_0 - U_2}$ — безразмерные комбинации показаний.

1. Соответствие выводов. Подключим источник и вольтметр последовательно к двум выводам ящика. Ток идёт через вольтметр, источник и сопротивление между этими выводами; чем это сопротивление меньше, тем больше ток и тем больше показание вольтметра $U = IR_\text{В}$. Между выводами схемы сопротивления: A–C — $R_1 + R_2$ (самое большое), A–B — R_1, B–C — R_2 (самое маленькое, так как $R_1 > R_2$). Перебрав три пары выводов ящика:

- пара с наименьшим показанием — это A и C, третий вывод — B;
- из двух пар с B большее показание даёт пара B–C.

Так получено соответствие $C \to 1$, $B \to 2$, $A \to 3$ (рис. 5). Проверка — включение резистора параллельно вольтметру: теперь чем меньше сопротивление, тем *меньше* показание.

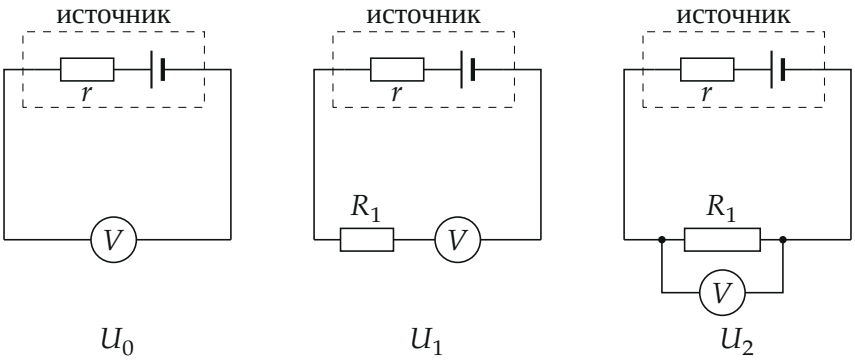

Рис. 4. Три включения для резистора R_1 (выводы A и B ящика): вольтметр прямо на источник, последовательно с R_1, параллельно R_1. Для R_2 — то же на выводах B и C.

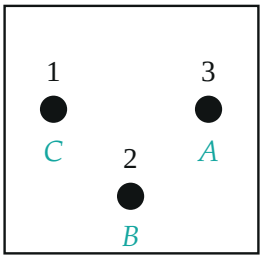

Рис. 5. Найденное соответствие выводов: C — 1, B — 2, A — 3.

2. Три уравнения. Закон Ома для полной цепи в каждом включении (рис. 4). Вольтметр показывает напряжение на своём сопротивлении:

$$U_0 = U\frac{R_\text{B}}{r+R_\text{B}}, \qquad U_1 = U\frac{R_\text{B}}{r+R_1+R_\text{B}}, \qquad U_2 = U\frac{R_1R_\text{B}}{rR_1+R_1R_\text{B}+rR_\text{B}}.$$

В третьем случае вольтметр и R_1 параллельны, их общее сопротивление $\frac{R_1R_\text{B}}{R_1+R_\text{B}}$ стоит последовательно с r.

3. Исключаем U. Запишем уравнения в обратных величинах: $\frac{1}{U_0} = \frac{1}{U}\left(1+\frac{r}{R_\text{B}}\right)$, $\frac{1}{U_1} = \frac{1}{U_0}+\frac{R_1}{UR_\text{B}}$, $\frac{1}{U_2} = \frac{1}{U_0}+\frac{r}{UR_1}$. Вычитаем $\frac{1}{U_0}$ и делим на

$\frac{1}{U_0}$:

$$x_1 = \frac{U_1}{U_0 - U_1} = \frac{r + R_\text{В}}{R_1}, \qquad x_2 = \frac{U_2}{U_0 - U_2} = R_1 \frac{r + R_\text{В}}{rR_\text{В}}.$$

Произведение и отношение этих величин:

$$k = x_1 x_2 = \frac{(r + R_\text{В})^2}{rR_\text{В}}, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{R_1^2}{rR_\text{В}}.$$

4. Данные и сопротивление вольтметра. Измерения (по официальному решению): $U_0 = 1668$ мВ; для R_1: $U_1 = 985$ мВ, $U_2 = 1213$ мВ; для R_2: $U_1' = 1334$ мВ, $U_2' = 842$ мВ.

	U_1, мВ	U_2, мВ	x_1	x_2
R_1	985	1213	1,442	2,666
R_2	1334	842	3,994	1,019

Получаем $k = 3{,}84$ и $k' = 4{,}07$. Функция $k(R_\text{В}/r) = \frac{(1+R_\text{В}/r)^2}{R_\text{В}/r}$ не бывает меньше 4 и равна 4 только при $R_\text{В} = r$ (рис. 6). Оба измеренных значения отличаются от 4 меньше чем на 4% — в пределах погрешности, среднее 3,96. Значит, $R_\text{В} \approx r = 1$ кОм.

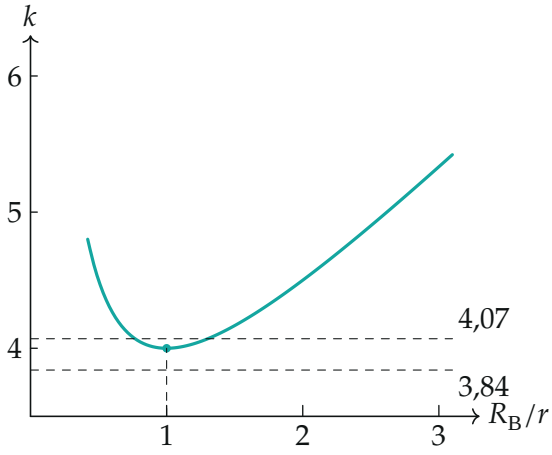

Рис. 6. Зависимость $k = \frac{(r+R_B)^2}{rR_B}$ от R_B/r. Минимум 4 — при $R_B = r$; измеренные k (пунктир) лежат у самого минимума.

5. Сопротивления резисторов. Из отношения $\frac{x_2}{x_1} = \frac{R_1^2}{rR_\text{B}}$ с $R_\text{B} = r$:

$$R_1 = r\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = 1000\sqrt{\frac{2{,}666}{1{,}442}} \approx 1{,}36 \text{ кОм},$$

$$R_2 = r\sqrt{\frac{x_2'}{x_1'}} = 1000\sqrt{\frac{1{,}019}{3{,}994}} \approx 0{,}51 \text{ кОм}.$$

По отдельности формулы шага 3 дают $R_1 = \frac{2r}{x_1} = 1{,}39$ кОм и $R_1 = \frac{x_2 r}{2} = 1{,}33$ кОм, $R_2 = 0{,}50$ и $0{,}51$ кОм — разброс около 2%. Итог: $R_1 \approx 1{,}4$ кОм, $R_2 \approx 0{,}5$ кОм.

Обратите внимание. Считать вольтметр идеальным здесь нельзя: идеальный вольтметр в последовательном включении показывал бы U при любом R_1, и такие опыты не отличили бы резисторы друг от друга. При k около 4 само R_B определяется грубо (минимум функции пологий), но R_1 зависит от него лишь как $\sqrt{R_\text{B}}$. В критериях организаторов диапазоны для R_1 и R_2 указаны переставленными; ответ дан по решению.

Проверка. Подставим $R_\text{B} = r = 1$ кОм, $R_1 = 1{,}36$ кОм и $U = 2U_0 = 3{,}34$ В в формулы шага 2: $U_1 = 3{,}34 \cdot \frac{1}{3{,}36} = 0{,}99$ В (измерено 0,985), $U_2 = 3{,}34 \cdot \frac{1{,}36}{1{,}36+1{,}36+1} = 1{,}22$ В (измерено 1,213). Порядок $R_1 > R_2$ совпадает с условием.

Ответ. C — вывод 1, B — вывод 2, A — вывод 3; $R_1 \approx 1{,}4$ кОм, $R_2 \approx 0{,}5$ кОм (сопротивление вольтметра $R_\text{B} \approx r = 1$ кОм).