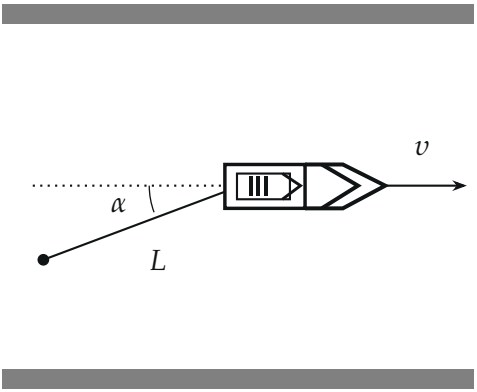
Воднолыжник

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Воднолыжник».

Катер едет посередине прямого длинного канала фиксированной ширины с постоянной скоростью v. За катером на натянутом все время тросе длиной L курсирует от одного берега канала до другого воднолыжник. В момент времени, когда расстояние между лыжником и правым берегом увеличивалось со скоростью u, а трос составлял с направлением движения катера угол α_0, спортсмен оторвался от воды. Пренебрегая вертикальной составляющей скорости, найдите модуль скорости u_0 спортсмена в этот момент. Какова в этот же момент сила натяжения троса T, если масса спортсмена m? На рисунке в качестве иллюстрации показан вид сверху в некоторый момент движения воднолыжника.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику связанных тел и движение по окружности. Трос всё время натянут — расстояние от лыжника до катера постоянно, поэтому *в системе отсчёта катера* лыжник движется по окружности радиуса L, и его скорость относительно катера перпендикулярна тросу. Катер едет равномерно, его система инерциальна. В момент отрыва от воды на лыжника по горизонтали действует только трос — он и создаёт центростремительное ускорение в системе катера.

Обозначения. Ось x — по скорости катера $\vec{v}$, ось y — поперёк канала от правого берега к левому (правый берег — справа по ходу катера); α_0

— угол троса с осью x; $\vec{u}_0$ — скорость лыжника относительно берега, её проекции $u_x = u'$ и $u_y = u$ (расстояние до правого берега растёт — лыжник движется к левому); $\vec{u}_{\text{отн}}$ — скорость лыжника относительно катера.

1. Скорость относительно катера. Закон сложения скоростей: $\vec{u}_0 = \vec{v} + \vec{u}_{\text{отн}}$. Длина троса не меняется, поэтому $\vec{u}_{\text{отн}} \perp$ трос. Её поперечная составляющая — это вся поперечная скорость лыжника (катер поперёк канала не движется): $u_{\text{отн},y} = u$. Вектор, перпендикулярный тросу под углом α_0 к оси x, составляет α_0 с осью y, поэтому

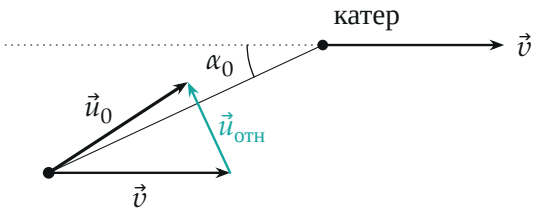
$$u_{\text{отн}} = \frac{u}{\cos\alpha_0}, \qquad |u_{\text{отн},x}| = u\tan\alpha_0.$$

2. Продольная скорость: два случая. Знак $u_{\text{отн},x}$ зависит от того, по какую сторону от катера лыжник.

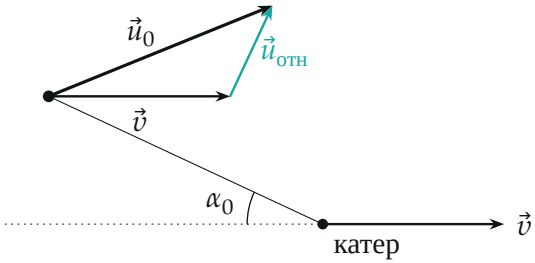
Лыжник между катером и правым берегом (как на рисунке условия). Трос от катера идёт назад и вправо; лыжник, двигаясь к оси канала, движется по окружности вокруг катера назад: $u_{\text{отн},x} = -u\tan\alpha_0$. Это же условие в виде «проекции скоростей концов троса на трос равны»:

$$v\cos\alpha_0 = u'\cos\alpha_0 + u\sin\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad u' = v - u\tan\alpha_0.$$

Лыжник между катером и левым берегом (уходит от оси к левому берегу): $v\cos\alpha_0 = u'\cos\alpha_0 - u\sin\alpha_0$, $u' = v + u\tan\alpha_0$ — он обгоняет катер в продольном направлении.



Лыжник между катером и правым берегом: $\vec{u}_0 = \vec{v} + \vec{u}_{отн}$, $\vec{u}_{отн} \perp$ трос и направлена назад, $u' = v - u\tan\alpha_0$ (вид сверху, $\alpha_0 = 25°$, $u = v/2$)



Лыжник между катером и левым берегом: $\vec{u}_{отн}$ направлена вперёд, $u' = v + u\tan\alpha_0$

3. Модуль скорости. По теореме Пифагора для проекций:

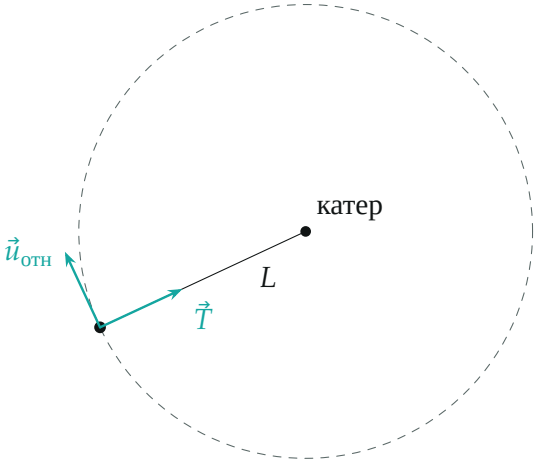
$$u_0 = \sqrt{u'^2 + u^2} = \sqrt{u^2 + (v \pm u\tan\alpha_0)^2},$$

«−» — лыжник между катером и правым берегом, «+» — между катером и левым.

4. Натяжение. В системе катера лыжник движется по окружности радиуса L со скоростью $u_{отн} = u/\cos\alpha_0$. Второй закон Ньютона в проекции на трос (к катеру, центру окружности): в момент отрыва от воды по горизонтали действует только трос, поэтому

$$T = \frac{mu_{отн}^2}{L} = \frac{mu^2}{L\cos^2\alpha_0}.$$

Касательное ускорение лыжника при этом может быть любым — на натяжение оно не влияет.



траектория в системе катера

В системе катера: лыжник на окружности радиуса L, скорость по касательной, трос тянет к центру

Обратите внимание: u — это не скорость лыжника, а только её поперечная проекция; продольная зависит от того, по какую сторону от катера лыжник, отсюда два ответа для u_0. А натяжение одинаково в обоих случаях — оно зависит только от скорости относительно катера.

Проверка. Размерность: mu^2/L — кг·м/с^2 = Н. Пределы: при $\alpha_0 = 0$ (лыжник точно за катером) $u_0 = \sqrt{u^2 + v^2}$ в обоих случаях — продольно он идёт вместе с катером, и $T = mu^2/L$; при $u = 0$ лыжник покоится относительно катера, $u_0 = v$, $T = 0$ — в воздухе без относительной скорости трос не тянет. Числа рисунка ($\alpha_0 = 25°$, $u = v/2$): $u' = 0{,}77v$ или $1{,}23v$, длины стрелок построены по ним.

Смысл: относительно катера лыжник — камень на верёвке, и всё решение — переход в систему катера и обратно.

Ответ. $u_0 = \sqrt{u^2 + (v \pm u\tan\alpha_0)^2}$ («−» — лыжник между катером и правым берегом, «+» — между катером и левым); $T = \dfrac{mu^2}{L\cos^2\alpha_0}$.