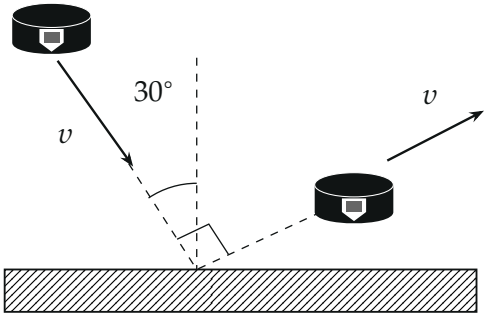
Шайбу!

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Шайбу!».

Шайба летит в сторону движущейся поступательно тяжёлой плиты так, что их плоскости параллельны. Вектор скорости шайбы составляет угол $\varphi = 30^\circ$ с нормалью к поверхности плиты. Происходит столкновение. Векторы скорости шайбы до и после столкновения одинаковы по модулю и перпендикулярны друг другу (см. рисунок). Кроме того, они лежат в одной плоскости с вектором скорости плиты. Определите минимальное и максимальное значения коэффициента трения μ, при которых возможно такое столкновение.



▲ **Решение. Что происходит.** Плита тяжёлая, её скорость $\vec{u}$ при ударе не меняется. На шайбу во время удара действуют две силы со стороны плиты: реакция $\vec{N}$ по нормали и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ вдоль поверхности (тяжестью за короткое время удара пренебрегаем). Их суммарный импульс — это изменение импульса шайбы $m\Delta\vec{v}$, а его направление нам известно из геометрии: скорости до и после равны по модулю и перпендикулярны. Отношение касательной и нормальной составляющих $\Delta\vec{v}$ — это отношение импульсов силы трения и реакции. Пока шайба скользит по плите, $F_{\text{тр}} = \mu N$ и это отношение равно μ; если скольжение прекратилось, трение становится силой трения покоя, $F_{\text{тр}} < \mu N$. Класс задачи — удар с трением, импульс силы.

Обозначения. m — масса шайбы; v — модуль скорости шайбы до и после удара; $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — скорости до и после; $\vec{u}$ — скорость плиты; ось

x — вдоль плиты в сторону касательной составляющей $\vec{v}_1$, ось y — по нормали от плиты (рис. 1); α — угол между $\Delta\vec{v}$ и нормалью.

1. Скорости в проекциях. Скорость до удара направлена к плите под углом $\varphi = 30^\circ$ к нормали:

$$v_{1x} = v\sin\varphi = \frac{v}{2}, \qquad v_{1y} = -v\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Скорость после удара перпендикулярна $\vec{v}_1$ и направлена от плиты ($v_{2y} > 0$), значит, это $\vec{v}_1$, повёрнутый на 90° против часовой стрелки: она составляет угол $90^\circ - \varphi = 60^\circ$ с нормалью, и

$$v_{2x} = v\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad v_{2y} = v\sin\varphi = \frac{v}{2}.$$

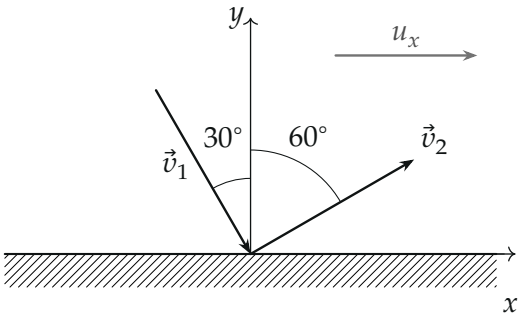


Рис. 1. Оси и скорости шайбы: $\vec{v}_1$ (до) и $\vec{v}_2$ (после), $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, угол между ними 90°. Плита движется так, что её поверхность обгоняет шайбу вдоль x.

2. Направление изменения скорости. Вычитаем проекции:

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}v > 0, \qquad \Delta v_y = v_{2y} - v_{1y} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}v > 0.$$

Угол α вектора $\Delta\vec{v}$ с нормалью (рис. 2):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta v_x}{\Delta v_y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

Тот же угол виден геометрически: треугольник скоростей $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\Delta\vec{v}$ — прямоугольный равнобедренный, $\Delta\vec{v}$ составляет 45° с $\vec{v}_2$, а $\vec{v}_2$ — 60° с нормалью: $\alpha = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

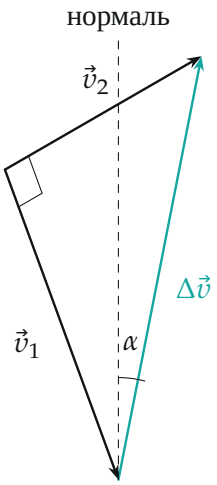


Рис. 2. Треугольник скоростей. $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ отклонён от нормали на $\alpha = 15^\circ$ в сторону оси x.

3. Импульсы сил за удар. Второй закон Ньютона в импульсной форме для шайбы за время удара, в проекциях на оси x и y:

$$m\,\Delta v_x = \int F_{\text{тр}}\,dt, \qquad m\,\Delta v_y = \int N\,dt.$$

$\Delta v_x > 0$ — сила трения действует на шайбу вдоль $+x$ (рис. 3). Трение скольжения направлено против скорости шайбы относительно плиты, значит, пока шайба скользит, поверхность плиты движется вдоль x быстрее неё: $u_x > v_x$. Плита тяжёлая, u_x за удар не меняется, а v_x растёт от $\frac{1}{2}v$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}v$.

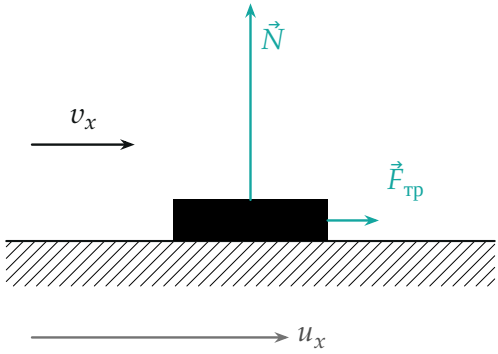


Рис. 3. Силы на шайбу во время удара. Плита (её x-скорость u_x) обгоняет шайбу, трение тянет шайбу вперёд. $F_{тр} \approx 0{,}27N$ — стрелки в этом отношении.

4. Шайба скользит весь удар. Если $u_x > v_{2x}$, проскальзывание не прекращается до конца удара, и в каждый момент $F_{\text{тр}} = \mu N$. Тогда

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta v_y} = \frac{\int \mu N\, dt}{\int N\, dt} = \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \operatorname{tg}\alpha = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27.$$

При другом μ в этом режиме угол α был бы другим, и скорость после удара не была бы перпендикулярна начальной.

5. Скольжение прекращается. Если $u_x = v_{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}v$, то в какой-то момент удара шайба догоняет плиту по x и дальше движется вдоль неё вместе с плитой: трение становится трением покоя, а оно не больше μN. Поэтому

$$\int F_{\text{тр}}\, dt \le \mu \int N\, dt \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{\Delta v_x}{\Delta v_y} = 2 - \sqrt{3}.$$

Любое $\mu \ge 2 - \sqrt{3}$ подходит: чем больше μ, тем раньше v_x сравнивается с u_x, но итог по x один и тот же, $v_{2x} = u_x$ (рис. 4). Ограничения сверху нет.

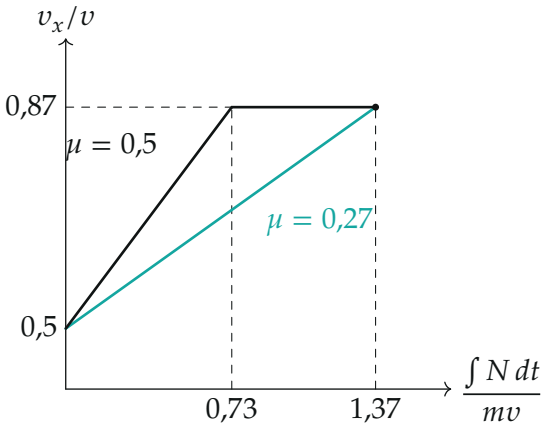


Рис. 4. Как растёт v_x шайбы по мере набора импульса реакции. Бирюзовая прямая: $\mu = 0{,}27$, скольжение до конца удара. Чёрная: $\mu = 0{,}5$, v_x догоняет $u_x = 0{,}87v$ при $\int N\,dt = 0{,}73\,mv$, дальше не растёт. Конечная точка у обеих одна.

Обратите внимание. При $\mu < 2 - \sqrt{3}$ такое столкновение невозможно ни при какой скорости плиты: даже при скольжении весь удар трение даёт слишком маленький Δv_x. Скорость плиты по нормали на ответ не влияет — она меняет лишь, насколько удар упругий, а импульсы считаются по фактическому $\Delta\vec{v}$.

Проверка. Модуль скорости сохранился, $v_1^2 = v_2^2 = v^2$, при этом $\Delta v_x = 0{,}37v$, $\Delta v_y = 1{,}37v$, отношение $0{,}268 = \operatorname{tg} 15°$. Предел: при $\varphi \to 0$ (шайба летит по нормали) $\vec{v}_2$ лежала бы вдоль плиты, $\Delta v_x = \Delta v_y = v$, $\alpha = 45°$, $\mu_{\min} = 1$ — чтобы развернуть скорость на 90° к плите, трение должно быть сравнимо с реакцией, разумно.

Ответ. $\mu_{\min} = \operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$ (шайба скользит весь удар); максимального значения нет: при любом $\mu > 0{,}27$ столкновение возможно, если скольжение прекращается до конца удара.