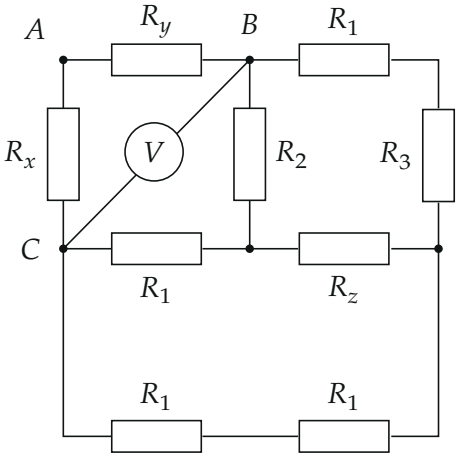
Девять резисторов

Задача 3. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Девять резисторов».

Электрическая цепь состоит из 9 резисторов и идеального вольтметра (см. рисунок). Сопротивление трёх резисторов R_x, R_y и R_z неизвестны, сопротивления остальных: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм. При подключении к точкам A и B источника с постоянным напряжением $U_0 = 10$ В вольтметр показывает $U_1 = 4$ В, при подключении того же источника к точкам A и C показания вольтметра $U_2 = 5$ В. Определите:

1. значения сопротивлений R_x, R_y и R_z;
2. значения силы тока через источник при подключении его к точкам A и B (I_{AB}) и к точкам A и C (I_{AC}).



▲ **Решение. Что происходит.** Источник подключают к A и B или к A и C, а все резисторы, кроме R_x и R_y, висят между точками B и C — к ним же подключён вольтметр. Этот кусок цепи — мост, и он сбалансирован: тока через R_z нет, поэтому R_z ничего не меняет. Тогда весь кусок между B и C — один резистор R_{BC}, и цепь сводится к треугольнику из R_x, R_y и R_{BC}. Дальше — делитель напряжения и закон Ома. Класс задачи — расчёт цепи постоянного тока, сбалансированный мост.

Обозначения. M — узел, где сходятся R_2 и средний R_1; N — узел, где сходятся R_3, R_z и нижние резисторы; R_{BC} — сопротивление части цепи между B и C без R_x и R_y; φ — потенциал.

1. Перерисуем часть цепи между B и C. Вольтметр идеальный, ток через него не идёт — при расчёте токов его нет. Проводник B–C в исходной схеме — это провод вольтметра, а не перемычка. Идём от B: к M через $R_2 = 2$ кОм; к N через R_1 и R_3 последовательно, $1 + 3 = 4$ кОм. От C: к M через $R_1 = 1$ кОм; к N через два R_1 снизу, 2 кОм. Между M и N — R_z. Получился мост (рис. 1).

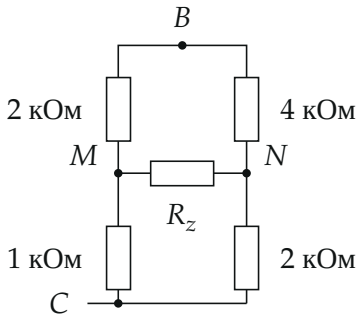


Рис. 1. Часть цепи между B и C — мост: верхние плечи 2 и 4 кОм, нижние 1 и 2 кОм, в диагонали R_z.

2. Мост сбалансирован. Пусть между B и C есть напряжение U_{BC}, $\varphi_C = 0$. Предположим, что тока через R_z нет, и проверим. Тогда левая ветвь B–M–C — делитель 2 : 1, правая B–N–C — делитель 4 : 2:

$$\varphi_M = U_{BC}\,\frac{1}{2+1} = \frac{U_{BC}}{3}, \qquad \varphi_N = U_{BC}\,\frac{2}{4+2} = \frac{U_{BC}}{3}.$$

Потенциалы M и N равны, напряжение на R_z ноль — тока через него действительно нет при любом R_z (условие баланса $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$). Значит, R_z из показаний вольтметра и токов *не находится*: годится любое значение. Сопротивление участка — две параллельные ветви 3 и 6 кОм:

$$R_{BC} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2 \text{ кОм}.$$

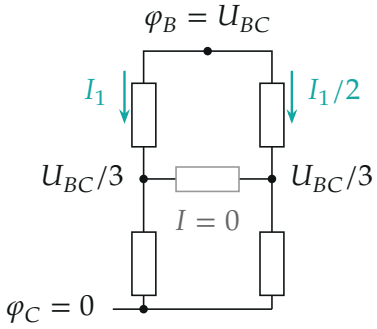


Рис. 2. Потенциалы в мосте: M и N на одном потенциале, через R_z ток не идёт. Ток в левой ветви (3 кОм) вдвое больше, чем в правой (6 кОм).

Пункт 1. Сопротивления. Источник между A и B (рис. 3). Вольтметр показывает напряжение U_{BC}. Ветвь $A \to C \to B$ — это R_x и R_{BC} последовательно под напряжением U_0; R_y подключён прямо к источнику и на эту ветвь не влияет. Делитель напряжения:

$$U_1 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_x + R_{BC}} \quad \Rightarrow \quad R_x = R_{BC}\left(\frac{U_0}{U_1} - 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{10}{4} - 1\right) = 3 \text{ кОм}.$$

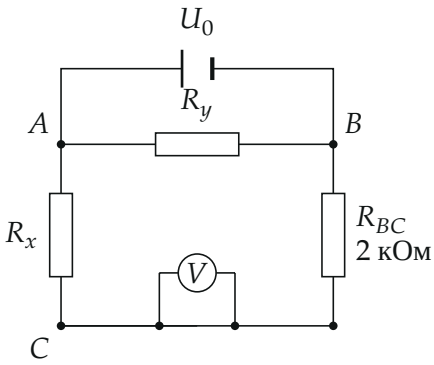


Рис. 3. Эквивалентная схема при источнике на A, B: ветвь $R_x + R_{BC}$ и ветвь R_y параллельны источнику; вольтметр — на R_{BC}.

Источник между A и C (рис. 4). Теперь ветвь $A \to B \to C$ — это R_y и R_{BC} последовательно, вольтметр снова на R_{BC}, а R_x подключён прямо

к источнику:

$$U_2 = U_0\frac{R_{BC}}{R_y + R_{BC}} \quad \Rightarrow \quad R_y = R_{BC}\left(\frac{U_0}{U_2} - 1\right) = 2\cdot\left(\frac{10}{5} - 1\right) = 2\text{ кОм}.$$

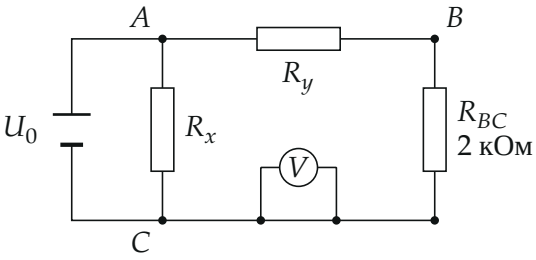


Рис. 4. Источник на A, C: ветвь R_y+R_{BC} и ветвь R_x параллельны источнику.

Пункт 2. Токи через источник. Ток источника — сумма токов двух параллельных ветвей (первое правило Кирхгофа для узла A), каждый — по закону Ома для ветви под напряжением U_0:

$$I_{AB} = \frac{U_0}{R_y} + \frac{U_0}{R_x + R_{BC}} = \frac{10\text{ В}}{2\text{ кОм}} + \frac{10\text{ В}}{5\text{ кОм}} = 5 + 2 = 7\text{ мА},$$

$$I_{AC} = \frac{U_0}{R_x} + \frac{U_0}{R_y + R_{BC}} = \frac{10}{3} + \frac{10}{4} = \frac{35}{6} \approx 5{,}8\text{ мА}.$$

Обратите внимание. Диагональный провод B–C на исходной схеме принадлежит вольтметру; если принять его за перемычку, участок BC закоротится и вольтметр показывал бы ноль. Значение R_z по этим данным найти нельзя — ответ «любое» и есть полный ответ на вопрос о R_z.

Проверка. При источнике на A, B ток через R_x равен 2 мА, на R_{BC} он даёт $2\cdot 2 = 4$ В $= U_1$, на R_x — 6 В, в сумме 10 В. При источнике на A, C через R_y идёт 2,5 мА: $2{,}5\cdot 2 = 5$ В $= U_2$. Размерность В/кОм = мА.

Ответ. 1) $R_x = 3$ кОм, $R_y = 2$ кОм, R_z — любое (мост сбалансирован, ток через R_z не идёт); 2) $I_{AB} = 7$ мА, $I_{AC} = \frac{35}{6} \approx 5{,}8$ мА.