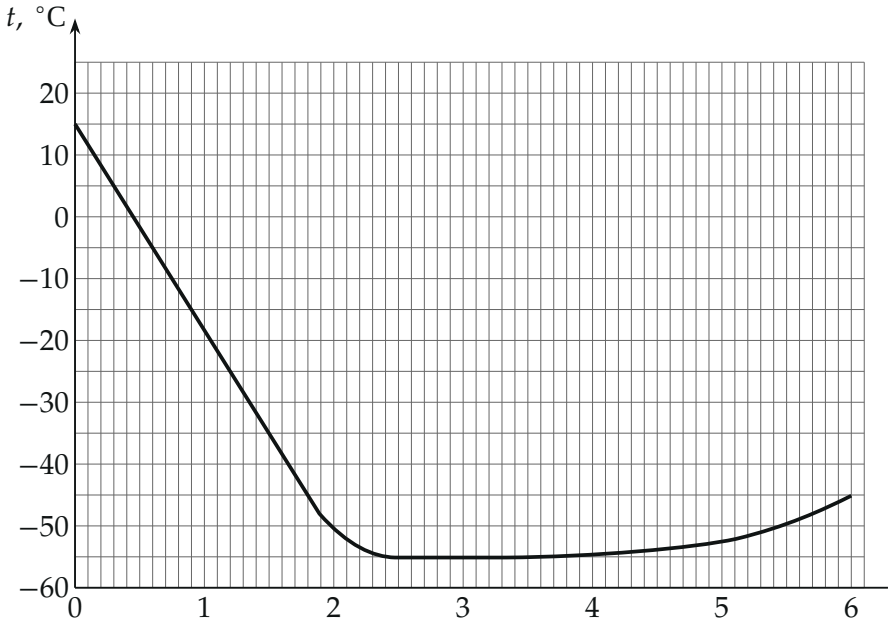
На планете R19

Задача 4. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 10 класс, задача 4] «На планете R19».

В далёком космосе астронавты исследовали атмосферу планеты R19. Оказалось, что она очень похожа на атмосферу Земли: состоит из идеального газа с молярной массой $\mu = 28$ г/моль и имеет схожую зависимость температуры от высоты (см. рис.). И даже ускорение свободного падения у поверхности R19 равно $g = 9{,}9$ м/с^2. Однако атмосферное давление на уровне моря отличается от земного и равно $p_0 = 500$ кПа. Определите по этим данным, пренебрегая изменением g с высотой, давление p_1 и плотность ρ_1 на высоте $h_1 = 1{,}0$ км. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



По горизонтальной оси — высота h над уровнем моря в километрах.

▲ **Решение. Что происходит.** Давление в атмосфере убывает с высотой потому, что каждый слой воздуха держит на себе вес всех слоёв выше — это условие равновесия слоя (гидростатика). Плотность газа связана

с давлением и температурой уравнением Менделеева–Клапейрона. На графике до $h \approx 2$ км температура падает линейно, и при данных числах оказывается, что давление падает *в той же пропорции*, что и температура, — тогда плотность не меняется с высотой, и задача становится такой же, как для несжимаемой жидкости. Класс задачи — барометрическая формула для неизотермической атмосферы.

Обозначения. h — высота; T — абсолютная температура; T_0 — у поверхности; α — скорость убывания температуры с высотой; ρ — плотность газа; S — площадь основания выделенного слоя.

1. Профиль температуры по графику. Прямая начинается при $t_0 = 15\,^\circ\text{C}$ на $h = 0$ и проходит через $0\,^\circ\text{C}$ при $h = 0{,}45$ км и через $-35\,^\circ\text{C}$ при $h = 1{,}5$ км. Значит, до $h \approx 1{,}9$ км

$$T = T_0 - \alpha h, \qquad T_0 = 288\ \text{K}, \qquad \alpha = \frac{50\ \text{K}}{1{,}5\ \text{км}} = 33{,}3\ \text{K/км}.$$

Высота $h_1 = 1$ км лежит на этом прямом участке: $T_1 = 288 - 33{,}3 = 254{,}7$ K.

2. Равновесие тонкого слоя. Выделим слой газа толщиной dh с основанием S (рис. 1). Второй закон Ньютона для покоящегося слоя в проекции на вертикальную ось: давление снизу pS уравновешивает давление сверху $(p + dp)S$ и вес слоя $\rho g S\, dh$:

$$pS - (p + dp)S - \rho g S\, dh = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = -\rho g\, dh.$$

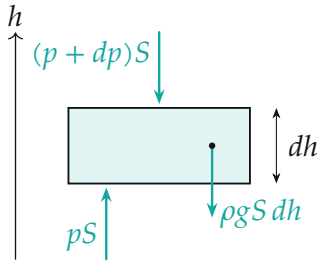


Рис. 1. Слой газа толщиной dh и силы на него. Разность давлений снизу и сверху держит вес слоя.

3. Как связаны изменения давления и температуры. Плотность из уравнения Менделеева–Клапейрона: $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Подставляем в шаг 2 и заменяем $dh = -\frac{dT}{\alpha}$ (на прямом участке):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\,dh = \frac{\mu g}{R\alpha}\,\frac{dT}{T} = k\,\frac{dT}{T}, \qquad k = \frac{\mu g}{R\alpha}.$$

Подставляем числа (все в СИ, $\alpha = 0{,}0333$ К/м):

$$k = \frac{0{,}028 \cdot 9{,}9}{8{,}31 \cdot 0{,}0333} = \frac{0{,}277}{0{,}277} \approx 1{,}00.$$

При $k = 1$ относительное изменение давления равно относительному изменению температуры: $p \propto T$, то есть $\frac{p}{T} = \text{const}$. Но плотность $\rho = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{p}{T}$ — значит, **плотность на прямом участке не меняется с высотой**, $\rho = \rho_0$.

4. Плотность у поверхности и на высоте h_1. Уравнение Менделеева–Клапейрона у поверхности:

$$\rho_1 = \rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}028}{8{,}31 \cdot 288} \approx 5{,}85 \text{ кг/м}^3.$$

5. Давление на высоте h_1. При постоянной плотности $dp = -\rho_0 g\,dh$ интегрируется, как в жидкости: давление убывает линейно (рис. 2),

$$p_1 = p_0 - \rho_0 g h_1 = 5 \cdot 10^5 - 5{,}85 \cdot 9{,}9 \cdot 1000 \approx 4{,}42 \cdot 10^5 \text{ Па} = 442 \text{ кПа}.$$

То же из $p \propto T$: $p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} = 500 \cdot \frac{254{,}7}{288} = 442$ кПа.

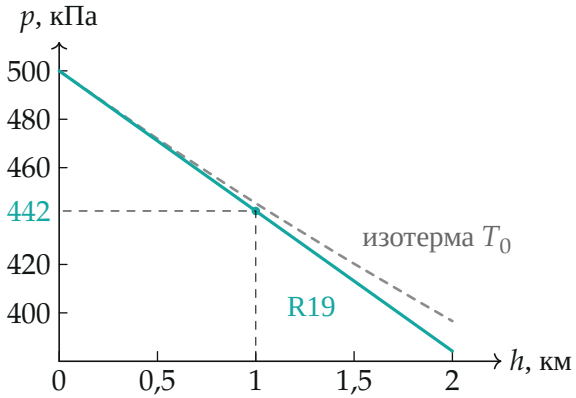


Рис. 2. Давление от высоты. Бирюзовая прямая — атмосфера R19 (ρ = const). Серая пунктирная — для сравнения изотермическая атмосфера при $T_0 = 288$ K (барометрическая формула $p_0 e^{-\mu g h / RT_0}$): она убывает медленнее.

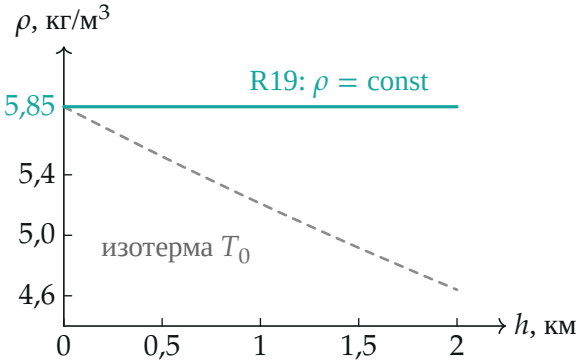


Рис. 3. Плотность от высоты. В атмосфере R19 давление и температура убывают в одной пропорции ($k = 1$), и плотность постоянна. В изотермической атмосфере она убывала бы вместе с давлением.

Обратите внимание. Ответ «плотность не меняется» — не общее свойство атмосферы, а следствие чисел этой задачи: $\alpha = \frac{\mu g}{R}$ (так называемый автоконвективный градиент). При $\alpha < \frac{\mu g}{R}$, как на Земле, плотность убывает с высотой.

Проверка. Размерность k: $\frac{\text{кг/моль·м/с}^2}{\text{Дж/(моль·К)·К/м}} = \frac{\text{кг·м}^2/\text{с}^2}{\text{Дж}} = 1$. Перепад $500 - 442 = 58$ кПа на 1 км — это вес столба газа высотой 1 км и

плотностью 5,85 кг/м^3: $5{,}85 \cdot 9{,}9 \cdot 1000 = 58$ кПа. Изотермическая атмосфера дала бы 445 кПа (рис. 2) — в холодеющей с высотой атмосфере давление падает быстрее, как и должно быть.

Ответ. $p_1 = p_0\left(1 - \dfrac{\mu g h_1}{RT_0}\right) \approx 442$ кПа; $\rho_1 = \dfrac{p_0\mu}{RT_0} \approx 5{,}85$ кг/м^3 (на участке 0–2 км плотность постоянна, так как $\dfrac{\mu g}{R\alpha} = 1$).