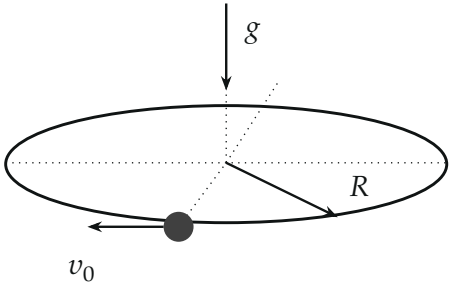
Бусинка на кольце

Задача 5. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Бусинка на кольце».

На тонкое проволочное кольцо радиусом R свободно надета бусинка массой m. Кольцо неподвижно и расположено горизонтально в поле тяжести g. Коэффициент трения скольжения между бусинкой и кольцом равен μ. В начальный момент времени бусинка движется со скоростью v_0.



1. Найдите модуль силы трения, действующей на бусинку, в начальный момент времени.
2. Найдите модуль полного ускорения бусинки в этот же момент.
3. Запишите выражение, позволяющее с погрешностью не более 2% найти путь бусинки за время, в течение которого её скорость уменьшилась на 1%.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Бусинка скользит по горизонтальной окружности. Кольцо давит на неё силой реакции $\vec{N}$, перпендикулярной проволоке, и тормозит силой трения μN вдоль проволоки. Реакция делает две работы сразу: держит бусинку против тяжести (вертикальная часть) и поворачивает её скорость по окружности (горизонтальная часть к центру). Поэтому прижимает бусинку к проволоке сила $N = m\sqrt{g^2 + (v^2/R)^2}$, больше, чем mg, — и трение больше, чем на прямой проволоке. Класс задачи — движение по окружности с трением, нормальное и касательное ускорения.

Обозначения. $\vec{N}_1$ — вертикальная составляющая реакции; $\vec{N}_2$ — горизонтальная, к центру кольца; a_n — нормальное (центростремительное) ускорение; a_τ — касательное; v — скорость бусинки в данный момент.

Пункт 1. Сила трения.

1. Силы и оси. На бусинку действуют тяжесть $m\vec{g}$, реакция кольца $\vec{N}$ (любое направление в плоскости, перпендикулярной проволоке) и трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ против скорости (рис. 1, 2). Оси: z — вверх, n — горизонтально к центру кольца, τ — по скорости.

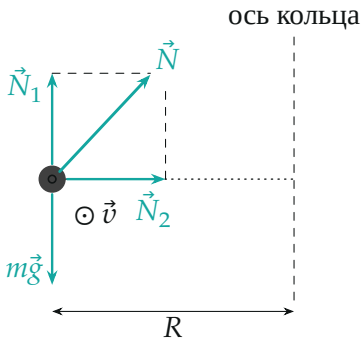


Рис. 1. Вертикальный разрез через бусинку и ось кольца (скорость — на нас). Реакция $\vec{N}$ наклонена: её вертикальная часть N_1 уравновешивает mg, горизонтальная N_2 даёт центростремительное ускорение. Нарисовано для $v_0^2/R \approx g$.

2. Второй закон Ньютона по осям z и n. Вертикального ускорения нет (бусинка остаётся в плоскости кольца), а нормальное ускорение при движении по окружности $a_n = \frac{v^2}{R}$:

$$z:\ N_1 - mg = 0 \ \Rightarrow\ N_1 = mg; \qquad n:\ N_2 = ma_n = \frac{mv^2}{R}.$$

Трение на эти оси не проецируется — оно вдоль τ.

3. Модуль реакции и трение. $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, поэтому $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$. Бусинка скользит, трение скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$. В начальный момент $v = v_0$:

$$F_{\text{тр}} = \mu m\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}.$$

Пункт 2. Полное ускорение. Второй закон Ньютона по оси τ (рис. 2): единственная сила вдоль скорости — трение, $ma_\tau = -F_{\text{тр}}$,

$$|a_\tau| = \mu\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}, \qquad a_n = \frac{v_0^2}{R}.$$

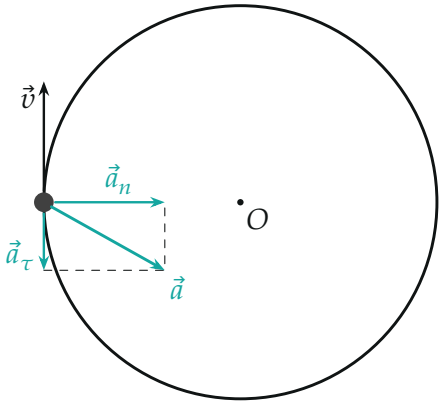


Рис. 2. Вид сверху. Скорость по касательной, $\vec{a}_n$ — к центру, $\vec{a}_\tau$ — против скорости. Полное ускорение — диагональ прямоугольника. Нарисовано для $\mu = 0{,}4$, $v_0^2/R = g$.

Нормальное и касательное ускорения перпендикулярны:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2 + \mu^2 g^2 + \mu^2\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2} = \sqrt{(\mu g)^2 + (1+\mu^2)\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}.$$

Пункт 3. Путь за время, пока скорость упала на 1%**.**

1. Насколько меняется торможение. Касательное ускорение зависит от скорости через v^2. Пока скорость падает на 1%, v^2 падает на 2% ($0{,}99^2 = 0{,}9801$), а $\sqrt{g^2 + v^4/R^2}$ — ещё меньше: в худшем случае ($v^2/R \gg g$) тоже на 2%. Значит, на всём участке a_τ отличается от начального не больше чем на 2%, и его можно считать постоянным — погрешность пути от этого не больше 2% (рис. 3).

2. Путь при постоянном торможении. Для равнозамедленного движения вдоль траектории $v_0^2 - v^2 = 2|a_\tau|\Delta S$. С $v = 0{,}99\,v_0$: $v_0^2 - v^2 =$

$0{,}0199\,v_0^2 \approx 2\cdot 10^{-2} v_0^2$ (это ещё 0,5%), и

$$\Delta S = \frac{v_0^2\cdot 10^{-2}}{|a_\tau|} = \frac{v_0^2\cdot 10^{-2}}{\mu\sqrt{g^2+(v_0^2/R)^2}}.$$

Та же формула — из «скорость почти постоянна»: время $\Delta t = \frac{0{,}01\,v_0}{|a_\tau|}$, путь $\Delta S \approx v_0\Delta t$.

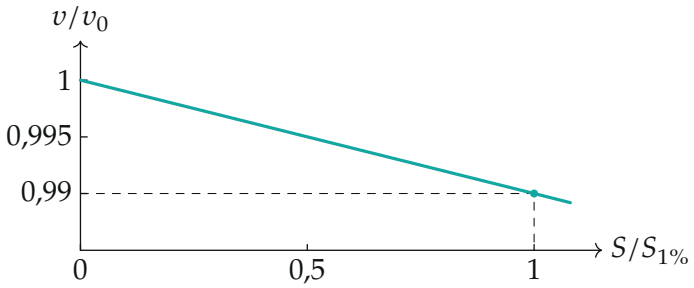


Рис. 3. Скорость от пройденного пути (расчёт для $v_0^2/R = g$, $\mu = 0{,}2$, путь в единицах ответа). За этот путь скорость падает с 1 до 0,99 почти линейно — торможение практически постоянно.

Обратите внимание. Сила нормального давления здесь не mg: забыть горизонтальную часть реакции — значит получить $F_{\text{тр}} = \mu mg$, а это верно только при $v_0^2 \ll gR$. Трение тормозит, но не поворачивает скорость: поворот целиком делает N_2.

Проверка. Размерности: $\sqrt{g^2+(v_0^2/R)^2}$ — м/с^2, $F_{\text{тр}}$ — Н, $\Delta S = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = $ м. Пределы: при $v_0 \to 0$ трение μmg и $a = \mu g$ — как у бусинки на прямой горизонтальной проволоке; при $\mu = 0$ ускорение $a = v_0^2/R$ — чисто центростремительное, а путь $\Delta S \to \infty$ — без трения бусинка не тормозит. Численная проверка (рис. 3, интегрирование $v\,dv/dS = -\mu\sqrt{g^2+v^4/R^2}$) при $v_0^2/R = g$ совпадает с формулой до 0,01%, а в самом невыгодном случае $v_0^2/R \gg g$ расходится с ней на 0,5% — в пределах 2%.

Ответ. 1) $F_{\text{тр}} = \mu m\sqrt{g^2+\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$; 2) $a = \sqrt{(\mu g)^2+(1+\mu^2)\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$;

3) $\Delta S = \dfrac{v_0^2 \cdot 10^{-2}}{\mu\sqrt{g^2 + (v_0^2/R)^2}}$.