Гук или не Гук?

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Гук или не Гук?».

Подготовка установки. Соберите установку, как показано на рис. 1. Для этого закрепите два канцелярских зажима на расстоянии $L_1 = 40$ см друг от друга. Соберите цепочку из пяти резинок. Воспользуйтесь узлом «схватик» (рис. 2) для соединения резинок между собой (затяните полученные узлы). Снимите верхние дужки с зажимов и проденьте крайние резинки через дужки. Установите дужки на место.

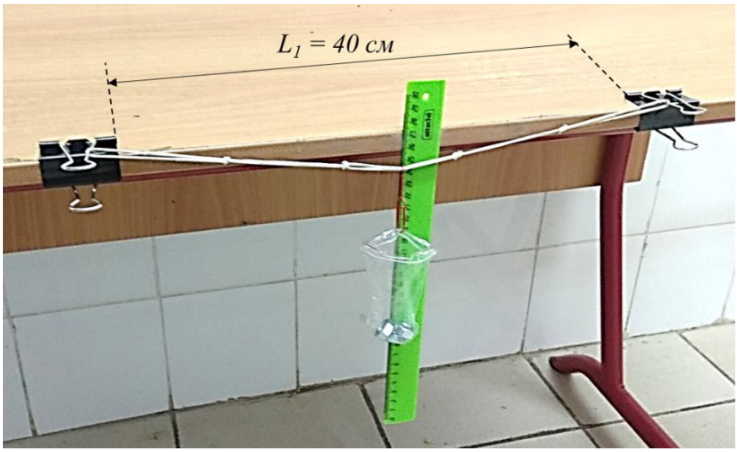


Рис. 1. Сборка экспериментальной установки

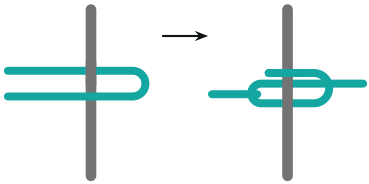


Рис. 2. Узел «схватик»: резинка (бирюзовая) охватывает соседнюю (серую) и продевается сама в себя

Пять банковских резинок соединены последовательно друг с другом в цепочку, которая натянута силой T_0 до длины $2L$. Если к середине

цепочки приложить поперечную силу F, то точка приложения этой силы сместится на некоторое расстояние h, называемое стрелой прогиба (рис. 3).

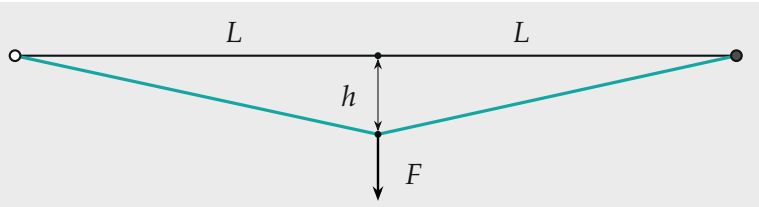


Рис. 3. Стрела прогиба h под поперечной силой F

1. Снимите зависимость h от F.
2. На основе полученных данных графическим методом определите коэффициент жёсткости k цепочки и силу T_0 её начального натяжения.

Оборудование: банковские резинки; два канцелярских зажима; две скрепки массой 0,4 г каждая, зип-лок пакет массой 0,5 г; линейка; кусочек скотча (по требованию); шесть одинаковых грузов (гаек) массой $(10{,}0 \pm 0{,}1)$ г.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие нити и закон Гука, а измеряем мы только длины и массы грузов. Поперечная сила F мала по сравнению с натяжением, но прогиб h работает как «рычаг»: при малом угле наклона половинок натяжение T во много раз больше F ($T \approx FL/(2h)$). Это способ узнать T, не имея динамометра. Одновременно половинка цепочки удлиняется на малую величину $x \approx h^2/(2L)$. Если резинки подчиняются закону Гука, то $T = T_0 + k_{0,5}x$ — график $T(x)$ прямая: её отрезок на оси даёт T_0, наклон — жёсткость половины цепочки.

Обозначения. $2L$ — длина натянутой цепочки, h — стрела прогиба; F — полная поперечная сила (вес гаек, скрепок и пакета); T — натяжение цепочки при прогибе, T_0 — без нагрузки; x — удлинение половины цепочки; $k_{0,5}$ — жёсткость половины, k — всей цепочки.

1. Измерения. Цепочка натянута между зажимами, мерим её длину между точками крепления: $2L = 44$ см, $L = 22$ см (резинки выходят

за зажимы, поэтому $2L > L_1$). Груз — зип-лок пакет с гайками, подвешенный на скрепке к середине цепочки. Сила F — вес гаек *вместе* со скрепками и пакетом: при одной гайке $m = 10 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}5 = 11{,}3$ г, $F = 0{,}111$ Н, каждая следующая добавляет 0,098 Н. Прогиб h мерим линейкой, поставленной вертикально у середины (рис. 1).

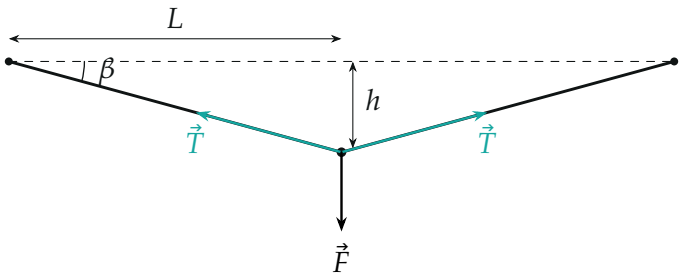
2. Связь удлинения со стрелой прогиба. Половина цепочки — гипотенуза треугольника с катетами L и h:

$$x = \sqrt{L^2 + h^2} - L \approx \frac{h^2}{2L} \qquad (h \ll L).$$

3. Натяжение через F. Точка подвеса в равновесии: на неё действуют сила F вниз и два натяжения T вдоль половинок. Второй закон Ньютона (равновесие) в проекции на вертикаль, $\sin\beta = h/\sqrt{L^2 + h^2}$:

$$2T\sin\beta = F \quad \Rightarrow \quad T = \frac{F}{2}\cdot\frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{h} \approx \frac{FL}{2h}.$$

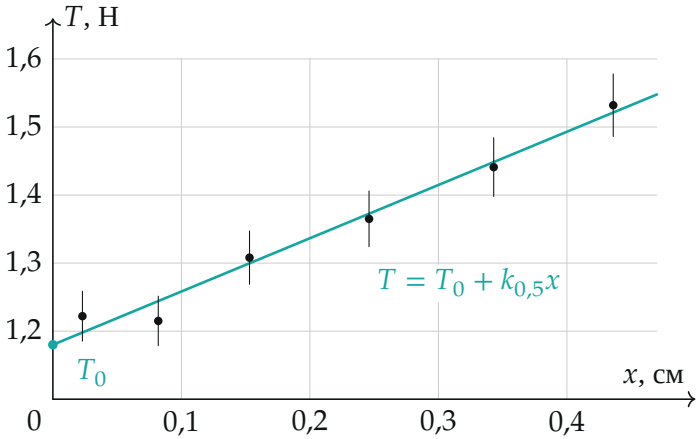
При наибольшем $h = 4{,}4$ см приближённая формула отличается от точной на $h^2/(2L^2) = 2$ %; считаем по точной.



Силы в точке подвеса: вертикальные составляющие двух натяжений держат F; угол β мал, поэтому $T \gg F$ (наклон преувеличен)

4. Таблица. По пунктам 2 и 3 (python):

N	1	2	3	4	5	6
h, см	1,0	1,9	2,6	3,3	3,9	4,4
F, Н	0,111	0,209	0,307	0,405	0,503	0,601
x, см	0,023	0,082	0,153	0,246	0,343	0,436
T, Н	1,22	1,21	1,31	1,37	1,44	1,53



$T(x)$: точки (отрезки — погрешность T около 3 %) лежат около прямой — резинки подчиняются закону Гука; прямая — метод наименьших квадратов по шести точкам

5. Графическая обработка. Точки ложатся на прямую $T = T_0 + k_{0,5}x$ — закон Гука для резинок выполняется. Метод наименьших квадратов по всем шести точкам (python): наклон $k_{0,5} = 0{,}78$ Н/см $= 78$ Н/м, его погрешность по разбросу точек 6 Н/м; отрезок $T_0 = 1{,}18$ Н с погрешностью 0,02 Н. С учётом погрешности h (около 5 %, она входит в T и вдвое — в x):

$$T_0 = (1{,}2 \pm 0{,}1)\ \text{Н}, \qquad k_{0,5} = (78 \pm 8)\ \text{Н/м}.$$

Две половины цепочки соединены последовательно; при одинаковом натяжении удлинения складываются, поэтому жёсткость всей цепочки

вдвое меньше:

$$k = \frac{k_{0,5}}{2} = (39 \pm 4)\ \text{Н/м}.$$

Обратите внимание: в силу F входят и скрепки с пакетом (1,3 г) — без них первые точки сдвинулись бы на 10 %. И T здесь — не вес груза, а натяжение, в $L/(2h)$ раз большее: при $h = 1$ см это в 11 раз.

Проверка. Размерность: FL/h — Н, T/x — Н/м. Порядок величин: банковская резинка длиной $\sim$ 8 см с жёсткостью $\sim$ 200 Н/м — пять в цепочке дают $\sim$ 40 Н/м, как и вышло. Начальное удлинение цепочки $T_0/k \approx 1{,}2/39$ м $= 3$ см при длине 44 см — цепочка натянута заметно, но не чрезмерно. У организаторов по пяти точкам (шестая на их графике не нанесена) $k_{0,5} = 74 \pm 8$ Н/м, $k = 37 \pm 4$ Н/м, $T_0 = 1{,}2 \pm 0{,}1$ Н; по шести точкам наклон чуть больше, оба значения в пределах погрешности друг друга.

Смысл: прогиб натянутой цепочки — чувствительные «весы» для натяжения, и по ним видно, что резинки при малых удлинениях — гуковские.

Ответ. 1) таблица $h(F)$ выше; 2) $T_0 = (1{,}2 \pm 0{,}1)$ Н, $k = (39 \pm 4)$ Н/м (жёсткость половины цепочки 78 ± 8 Н/м; по данным организаторов).