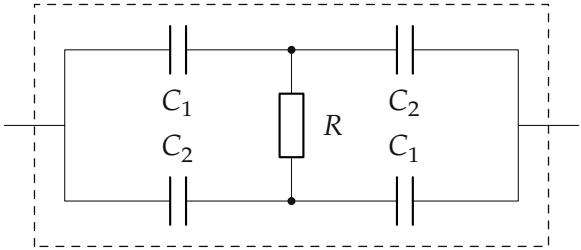
Серый ящик с конденсаторами

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 2] «Серый ящик с конденсаторами».

В выданном вам «сером ящике» находятся резистор сопротивлением R и четыре конденсатора ёмкостями C_1 и C_2, соединённые так, как показано на схеме. Определите значения ёмкостей C_1 и C_2.



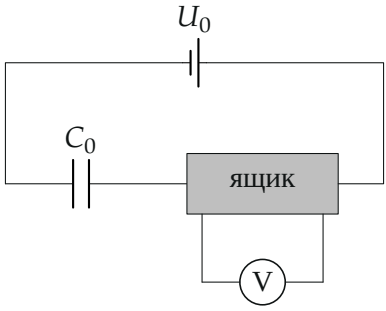
Оборудование: «серый» ящик, эталонный конденсатор ёмкостью $C_0 = (1{,}0 \pm 0{,}2)$ мФ, батарейка «Крона», мультиметр, зажим типа «крокодил», два соединительных провода.

Примечания. Соблюдайте полярность при подключении батарейки к «серому ящику» и к конденсатору. Положительный и отрицательный контакты ящика помечены на корпусе. Длинная ножка эталонного конденсатора — его «положительный» электрод. Шестиугольный контакт батарейки — отрицательный, круглый — положительный.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на соединения конденсаторов и закон сохранения заряда. Ёмкость ящика зависит от того, *успел ли резистор выровнять потенциалы* средних узлов. Сразу после подключения ток через R ещё не прошёл, и ящик — две параллельные цепочки «C_1 последовательно с C_2». Через долгое время ток через R прекращается, концы резистора при одном потенциале — его можно считать проводом, и ящик — «$C_1 \parallel C_2$» последовательно с «$C_2 \parallel C_1$». Две разные ёмкости ящика дают два уравнения на C_1 и C_2; измерить их позволяет делитель напряжения из ящика и эталонного C_0, включённых последовательно с батарейкой.

Обозначения. U_0 — напряжение батарейки; U_1 — напряжение на ящике сразу после подключения, U_2 — установившееся; $C_{я1}$, $C_{я2}$ — ёмкости ящика в эти моменты; C_0 — эталонный конденсатор.

1. Схема опыта. Все конденсаторы сначала разряжаем (замыкаем выводы ящика и C_0 проводом). Соединяем последовательно батарейку, C_0 и ящик (с соблюдением полярности), мультиметром в режиме вольтметра меряем напряжение на ящике.



Ящик и эталонный C_0 последовательно с батарейкой; вольтметр — на ящике

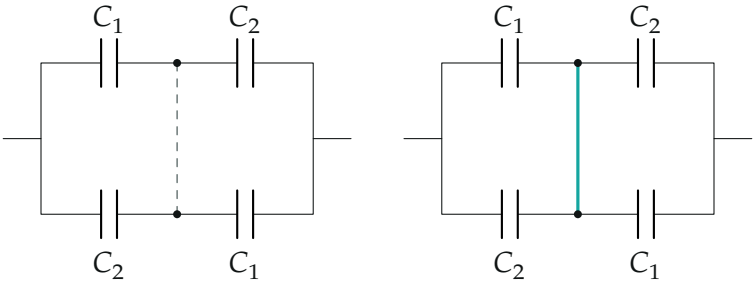
2. Делитель из двух конденсаторов. Ящик и C_0 соединены последовательно и сначала не заряжены — по закону сохранения заряда на них одинаковые заряды q: $q = C_0 U_{C_0} = C_я U$. Напряжения складываются, $U_{C_0} + U = U_0$:

$$U = U_0 \frac{C_0}{C_0 + C_я} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0}{U} = 1 + \frac{C_я}{C_0}.$$

Чем больше ёмкость ящика, тем меньше напряжение на нём.

3. Сразу после подключения. Ток через резистор ещё не успел перенести заряд, средние узлы изолированы друг от друга. Каждая ветвь — C_1 и C_2 последовательно, ёмкость $C_1C_2/(C_1 + C_2)$, две ветви параллельно:

$$C_{я1} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}, \qquad \frac{U_0}{U_1} = 1 + \frac{2C_1C_2}{C_0(C_1 + C_2)}. \qquad (1)$$



Слева — в первый момент средние узлы разделены (две ветви C_1–C_2); справа — в установившемся режиме ток через R прекратился и узлы при одном потенциале

4. Установившийся режим. Ток через R прекращается, когда напряжение на нём ноль: верхний и нижний средние узлы при одном потенциале, их можно соединить проводом. Суммарный заряд объединённого среднего узла — ноль (он ни с чем снаружи не связан), поэтому ящик ведёт себя как незаряжённая батарея «$(C_1 + C_2)$ последовательно с $(C_1 + C_2)$»:

$$C_{я2} = \frac{C_1 + C_2}{2}, \qquad \frac{U_0}{U_2} = 1 + \frac{C_1 + C_2}{2C_0}. \qquad (2)$$

Так как $(C_1 + C_2)/2 \geq 2C_1C_2/(C_1 + C_2)$ (среднее арифметическое не меньше среднего гармонического), $U_2 \leq U_1$: после перераспределения напряжение на ящике падает, а при $C_1 = C_2$ не меняется вовсе.

5. Решение системы. Из (2) сумма, из (1) с учётом (2) — произведение:

$$C_1 + C_2 = 2C_0\Big(\frac{U_0}{U_2} - 1\Big) = B,$$

$$C_1C_2 = C_0^2\Big(\frac{U_0}{U_1} - 1\Big)\Big(\frac{U_0}{U_2} - 1\Big) = A.$$

По теореме Виета C_1 и C_2 — корни $C^2 - BC + A = 0$:

$$C_{1,2} = \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - A}.$$

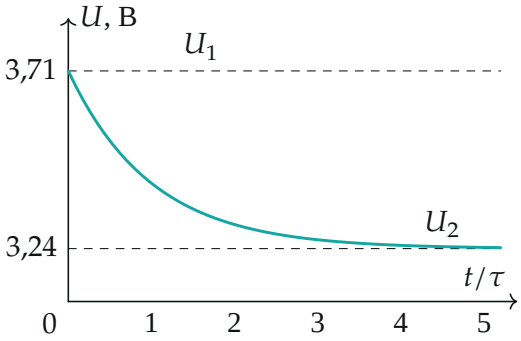
Схема симметрична, поэтому опыт не различает, какая из ёмкостей C_1, а какая C_2; большую называем C_1.

6. Измерения и числа. Напряжение U_1 меряем сразу после замыкания цепи (быстро: перезарядка через R начинается сразу), затем время от времени, пока показания не перестанут меняться, — это U_2. Получено $U_0 = 9{,}88$ В, $U_1 = 3{,}71$ В, $U_2 = 3{,}24$ В, $C_0 = 1{,}0$ мФ:

$$B = 2 \cdot 1{,}0 \cdot \left(\frac{9{,}88}{3{,}24} - 1\right) = 4{,}10 \text{ мФ}, \qquad A = 1{,}663 \cdot 2{,}049 = 3{,}41 \text{ мФ}^2,$$

$$C_1 = 2{,}05 + \sqrt{2{,}05^2 - 3{,}41} = 2{,}05 + 0{,}89 = 2{,}9 \text{ мФ},$$

$$C_2 = 2{,}05 - 0{,}89 = 1{,}2 \text{ мФ}.$$



Напряжение на ящике после подключения (вид кривой — схема; τ — время перезарядки через R): начальное U_1 и установившееся U_2

7. Погрешность. Обе ёмкости пропорциональны C_0 (при одних и тех же напряжениях), а C_0 известна с точностью 20 % — это главный вклад; погрешность вольтметра ($\sim$ 1 %) входит в $\sqrt{B^2/4 - A}$ сильнее, но всё равно меньше:

$$C_1 = (2{,}9 \pm 0{,}6) \text{ мФ}, \qquad C_2 = (1{,}2 \pm 0{,}3) \text{ мФ}.$$

Обратите внимание: конденсаторы перед каждым опытом надо разрядить — иначе на среднем узле останется заряд и формула (2) неверна.

Проверка. Подставим найденные ёмкости обратно: $C_{я1} = 2 \cdot 2{,}94 \cdot 1{,}16/4{,}10 = 1{,}66$ мФ, $U_1 = 9{,}88/(1 + 1{,}66) = 3{,}71$ В; $C_{я2} = 2{,}05$ мФ, $U_2 = 9{,}88/3{,}05 = 3{,}24$ В — совпадают с измеренными. Предел: при $C_1 = C_2$ средние узлы и без резистора при одном потенциале, $U_1 = U_2$ — в опыте $U_1 > U_2$, значит, ёмкости действительно разные.

Смысл: резистор превращает «быстрый» и «медленный» отклики ящика в две разные ёмкости — и этого хватает, чтобы найти обе неизвестные.

Ответ. $C_1 \approx (2{,}9 \pm 0{,}6)$ мФ, $C_2 \approx (1{,}2 \pm 0{,}3)$ мФ (по данным организаторов; какая из них C_1, опыт не различает).