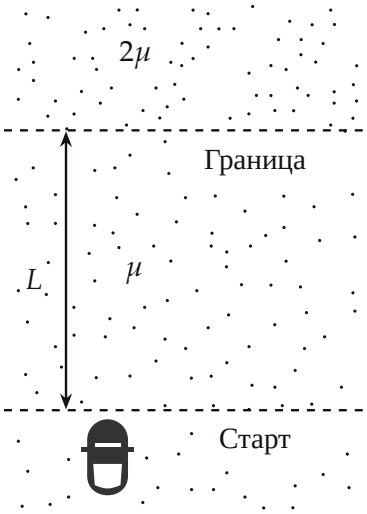
Испытания автомобиля

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Испытания автомобиля».

Плоский горизонтальный полигон для испытания гоночных автомобилей имеет два участка с разным покрытием. По условиям испытаний автомобиль должен проехать в одном направлении по прямой расстояние L от линии старта до линии границы между участками, стартуя с нулевой начальной скоростью (см. рис.). После пересечения линии границы автомобиль должен остановиться. Коэффициент трения на первом участке равен μ, а на втором — 2μ. За какое минимальное время $t_и$ автомобиль может выполнить это испытание (от старта до полной остановки)? Какая при этом будет скорость v_0 у автомобиля при пересечении им линии границы участков? Нарисуйте график зависимости скорости автомобиля от времени, соответствующий вашему решению, и отметьте на нём момент прохождения автомобилем линии границы. Автомобиль полноприводный с неограниченной мощностью двигателя. Размерами машины по сравнению с L пренебречь.

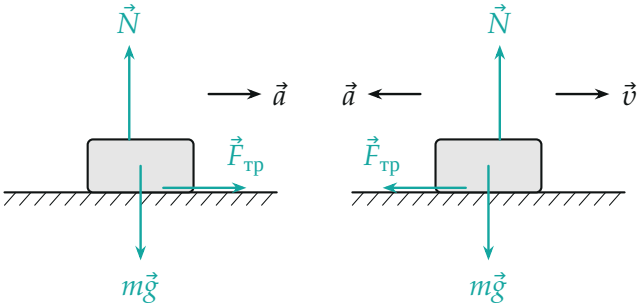


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача кинематики на оптимум с ограниченным ускорением. Мощность двигателя неограничена, поэто-

му ускорение ограничивает только сцепление шин с дорогой: горизонтально на машину действует лишь сила трения покоя от дороги, и она не больше μmg на первом участке и $2\mu mg$ на втором. Значит, по модулю ускорение не больше μg до границы и $2\mu g$ после. Тормозить за границей вдвое выгоднее, но там машина должна остановиться на любом пути — значит, торможение хочется перенести за границу. Однако въезд на большой скорости требует меньше разгоняться. Компромисс: разогнаться максимально, затем *заранее* подтормозить с ускорением μg до некоторой скорости v_0 и пересечь границу с ней, а за границей тормозить с $2\mu g$. Скорость v_0 найдём из минимума полного времени.

Обозначения. $a_1 = \mu g$ — наибольшее ускорение до границы, $2\mu g$ — после; v_2 — наибольшая скорость (точка A на графике), v_0 — скорость на границе (точка B); t_2 — момент начала торможения, t_0 — момент пересечения границы, $t_и$ — остановка (точка C).

1. Предельные ускорения. Второй закон Ньютона для машины в проекции на направление движения: $ma = F_{тр}$, где сила трения покоя от дороги $|F_{тр}| \le \mu N = \mu mg$ (по вертикали $N = mg$). Поэтому $|a| \le \mu g$ на первом участке, $|a| \le 2\mu g$ на втором. При разгоне сила трения направлена вперёд, при торможении — назад.



разгон: $a \le \mu g$ торможение: $|a| \le \mu g$

Силы на машину: горизонтально — только сила трения покоя от дороги, её модуль не больше μN

2. Какой должна быть стратегия. Пусть скорость на границе v_0 задана. После границы быстрее всего остановиться, тормозя с $2\mu g$: время

$v_0/(2\mu g)$. До границы надо пройти L за наименьшее время, начав с нуля и закончив скоростью v_0. Для этого скорость в каждый момент должна быть как можно больше, то есть график $v(t)$ — самый высокий из возможных: разгон с наклоном μg, затем торможение с наклоном $-\mu g$ (рисунок ниже, отрезки I и II). Путь — площадь под графиком, и при максимальных наклонах эта площадь набирается быстрее всего.

3. Время до границы при заданной v_0. Удобно обезразмерить: $s = v_0/(\mu g)$, $c = L/(\mu g)$ (s имеет размерность времени, c — квадрата времени). Скорость v_0 при разгоне достигается в момент $t_3 = s$, к этому моменту пройдено $S_1 = v_0^2/(2\mu g)$. Остаток $L - S_1$ проходится симметрично: разгон от v_0 до v_2 за Δt_2 и такое же торможение обратно до v_0 за Δt_2. Половина остатка — равноускоренный разгон:

$$\frac{L - S_1}{2} = v_0 \Delta t_2 + \frac{\mu g\, \Delta t_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \sqrt{\frac{s^2}{2} + c} - s$$

(положительный корень квадратного уравнения $\Delta t_2^2 + 2s\,\Delta t_2 - (c - s^2/2) = 0$). Время до границы

$$t_0 = t_3 + 2\Delta t_2 = 2\sqrt{\frac{s^2}{2} + c} - s.$$

4. Полное время и его минимум. За границей торможение длится $s/2$:

$$t_{\text{и}}(s) = t_0 + \frac{s}{2} = 2\sqrt{\frac{s^2}{2} + c} - \frac{s}{2}.$$

Производная по s (условие экстремума):

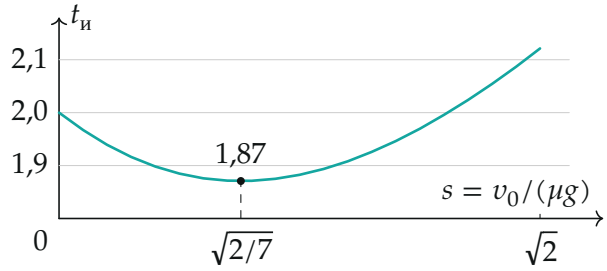
$$\frac{dt_{\text{и}}}{ds} = \frac{s}{\sqrt{s^2/2 + c}} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4s^2 = \frac{s^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad s^2 = \frac{2c}{7}.$$

Тогда $\sqrt{s^2/2 + c} = \sqrt{8c/7} = 2s$, и

$$t_{\text{и,min}} = 4s - \frac{s}{2} = \frac{7}{2}s = \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2L}{7\mu g}} = \sqrt{\frac{7L}{2\mu g}} \approx 1{,}87\sqrt{\frac{L}{\mu g}},$$

$$v_0 = \mu g\, s = \sqrt{\frac{2\mu g L}{7}}.$$

Это минимум, а не максимум: при $s = 0$ (въезд с нулевой скоростью) $t_и = 2\sqrt{c}$, при $s = \sqrt{2c}$ (разгон до самой границы, без подтормаживания) $t_и = \frac{3}{2}\sqrt{2c} \approx 2{,}12\sqrt{c}$; оба больше $1{,}87\sqrt{c}$.



Полное время в единицах $\sqrt{L/(\mu g)}$ от скорости на границе при $L/(\mu g) = 1$ (python): минимум при $s = \sqrt{2/7}$

5. График скорости. В единицах $\mu g = 1$, $L = 1$: $t_3 = s = 0{,}53$, $\Delta t_2 = 2s - s = s$, поэтому $t_2 = 2s = 1{,}07$, $v_2 = 2v_0$, $t_0 = 3s = 1{,}60$, $t_и = 3{,}5s = 1{,}87$. Площадь под графиком до t_0: $\frac{1}{2} \cdot (2s)^2 + \frac{2s+s}{2} \cdot s = 3{,}5s^2 = 1 = L$ — путь сходится.

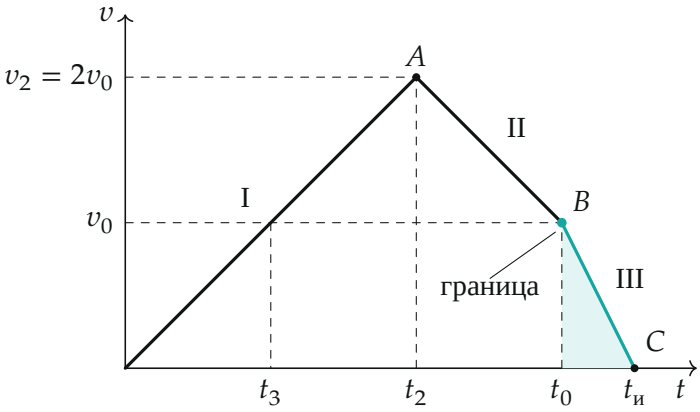


График $v(t)$ при оптимальном режиме: I — разгон μg, II — подтормаживание μg до границы (точка B), III — торможение $2\mu g$ за границей

Обратите внимание: без подтормаживания (разгон до самой границы) время $2{,}12\sqrt{L/(\mu g)}$ — на 13 % больше. Выигрыш за счёт того, что часть скорости сбрасывается на первом участке в обмен на более короткий разгон: на графике треугольник «лишнего» разгона меняется на более крутое торможение за границей.

Проверка. Размерность: $\sqrt{L/(\mu g)}$ — секунды, $\sqrt{\mu g L}$ — м/с. Второй способ проверки минимума — численный перебор s (python, график выше): минимум 1,8708 при $s = 0{,}535$, и $\sqrt{7/2} = 1{,}8708$, $\sqrt{2/7} = 0{,}535$. Предел: если бы за границей коэффициент трения тоже был μ, торможение за границей длилось бы s, а не $s/2$, и $t_и = 2\sqrt{s^2/2 + c}$ — растёт с s, минимум при $s = 0$: симметричный «треугольник» со временем $2\sqrt{L/(\mu g)}$, граница ничего не меняет, как и должно быть.

Смысл: более цепкое покрытие за границей выгодно использовать для торможения, поэтому въезжать на него нужно не на полной скорости, а на скорости, вдвое меньшей максимальной.

Ответ. $t_и = \sqrt{\dfrac{7L}{2\mu g}} \approx 1{,}87\sqrt{\dfrac{L}{\mu g}}$; $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu g L}{7}}$; график — разгон μg до $v_2 = 2v_0$, торможение μg до v_0 на границе, затем торможение $2\mu g$ до остановки.