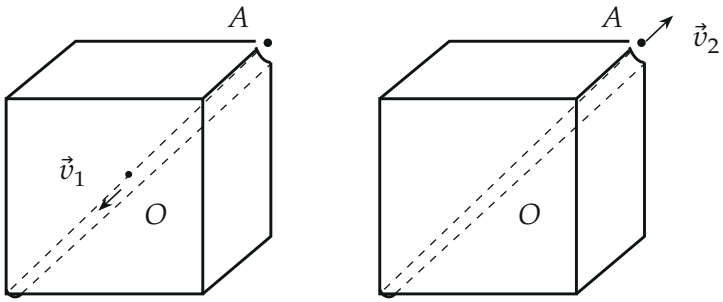
Кубическая планета

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Кубическая планета».

На планете в форме куба из однородного материала вдоль большой диагонали высверлили узкий прямой гладкий канал. Если маленький шарик отпустить без начальной скорости из точки A (вершина куба), его скорость в момент прохождения центра куба (точка O) будет равна v_1. Какую минимальную скорость v_2 нужно сообщить шарику при запуске в космос из точки A, чтобы он мог покинуть поле тяготения планеты? Атмосферы у планеты нет.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии в поле тяготения, и вся трудность — найти отношение потенциалов в центре и в вершине куба, не вычисляя интегралов. Помогают два приёма: *подобие* (потенциал однородного тела в «одной и той же» точке растёт как квадрат размера) и *суперпозиция* (большой куб складывается из восьми малых, и его центр — общая вершина всех восьми). Получится $\varphi_O = 2\varphi_A$, и тогда обе скорости выражаются через один и тот же $|\varphi_A|$.

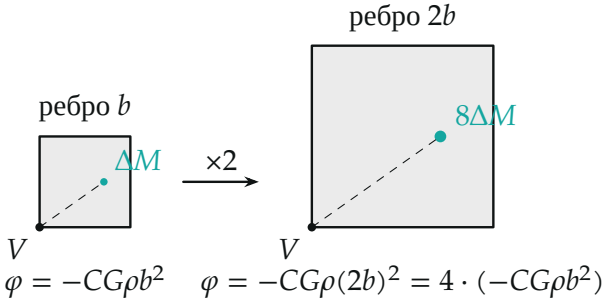
Обозначения. ρ — плотность планеты, a — ребро куба; φ_A, φ_O — гравитационные потенциалы в вершине и в центре (потенциал на бесконечности равен нулю, поэтому оба отрицательны); m — масса шарика; G — гравитационная постоянная.

1. Подобие: потенциал вершины куба $\propto a^2$. Потенциал в точке — сумма вкладов всех кусочков тела: $\varphi = -G\sum \Delta M_i/r_i$. Увеличим куб

в λ раз, сохранив плотность. Каждый кусочек станет тяжелее в λ^3 раз, а расстояние от него до вершины — больше в λ раз, поэтому каждый вклад, а с ним и вся сумма, вырастет в $\lambda^3/\lambda = \lambda^2$ раз:

$$\varphi_{\text{верш}}(a) = -C\,G\rho\,a^2,$$

где C — безразмерное число, одинаковое для всех кубов (его считать не придётся).



Подобие: кусочек стал в 8 раз тяжелее, а расстояние до вершины V — вдвое больше; вклад и весь потенциал выросли в 4 раза (вид спереди)

2. Суперпозиция: центр большого куба — вершина восьми малых. Разрежем планету с ребром $a = 2b$ тремя плоскостями через центр на восемь кубиков с ребром b. Центр O — общая вершина всех восьми. Потенциалы складываются (принцип суперпозиции), и каждый кубик даёт в своей вершине $-CG\rho b^2$:

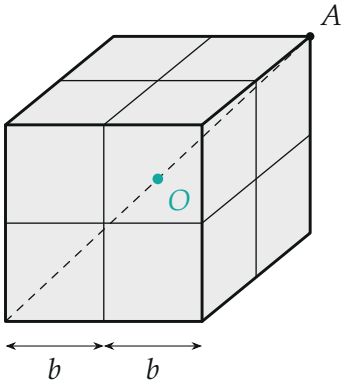
$$\varphi_O = 8\cdot(-CG\rho b^2).$$

Вершина A — вершина большого куба, по пункту 1

$$\varphi_A = -CG\rho(2b)^2 = 4\cdot(-CG\rho b^2).$$

Отсюда

$$\varphi_O = 2\varphi_A.$$



Куб с ребром $2b$ из восьми кубиков с ребром b: центр O — их общая вершина

3. Закон сохранения энергии. Канал гладкий, атмосферы нет — механическая энергия шарика сохраняется: $\frac{mv^2}{2} + m\varphi = \text{const}$.

Падение из A (покой) в O:

$$m\varphi_A = \frac{mv_1^2}{2} + m\varphi_O,$$

$$v_1^2 = 2(\varphi_A - \varphi_O) = 2(\varphi_A - 2\varphi_A) = -2\varphi_A = 2|\varphi_A|.$$

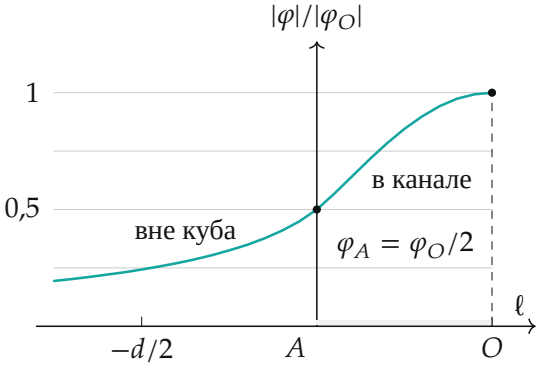
Запуск из A «на бесконечность» с минимальной скоростью — шарик приходит туда с нулевой скоростью, а потенциал там ноль:

$$\frac{mv_2^2}{2} + m\varphi_A = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = 2|\varphi_A|.$$

Значит,

$$v_2 = v_1.$$

4. Потенциал вдоль диагонали (численная проверка). Потенциал куба на его диагонали можно найти точно (python, интегрирование $1/r$ по объёму куба): в центре он ровно в 2,000 раза больше по модулю, чем в вершине. Вдоль канала от A к O модуль растёт от $|\varphi_A|$ до $2|\varphi_A|$, а снаружи спадает к нулю — примерно как у точечной массы.



Модуль потенциала на прямой диагонали: ℓ — расстояние от вершины A, $\ell < 0$ — снаружи, d — длина диагонали (расчёт python)

Обратите внимание: в центре большого куба потенциал равен сумме потенциалов *вершин* восьми малых кубиков, а не их центров. Подобие при этом сравнивает одну и ту же точку (вершину) у кубов разного размера. (В тексте решения организаторов малый потенциал назван «в центре кубика», но в вычислении он использован как потенциал вершины — результат $\varphi_O = 2\varphi_A$ тот же.)

Проверка. Размерность: $G\rho a^2$ — (Н·м^2/кг^2)·(кг/м^3)·м^2 = м^2/с^2, квадрат скорости. Тот же приём для однородного шара даёт известный результат: потенциал в центре шара $-\frac{3}{2}GM/R$, на поверхности $-GM/R$, отношение 1,5; у куба вершина дальше от основной массы, чем точка поверхности шара, и отношение больше — 2. Численный расчёт (рисунок выше) даёт 2,000.

Смысл: сколько энергии шарик набирает, падая от вершины к центру, столько же нужно, чтобы улететь от вершины на бесконечность.

Ответ. $v_2 = v_1$.