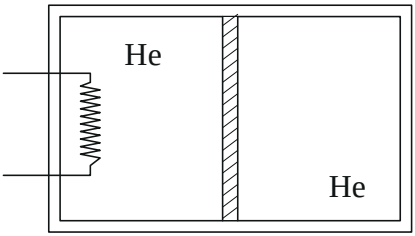
Сосуд с поршнем

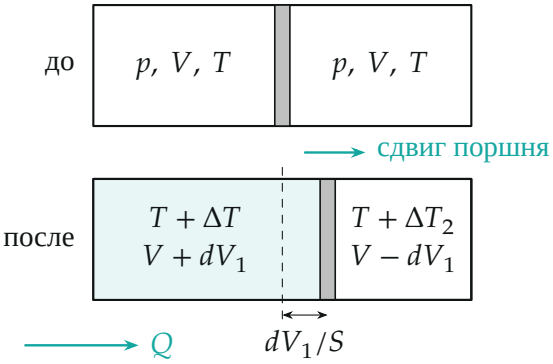
Задача 3. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Сосуд с поршнем».

Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части непроводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения. В начальный момент в левой и правой частях сосуда находится по одному молю гелия при одинаковой температуре. В левую часть сосуда подвели тепло с помощью нагревателя. При этом температура гелия в ней увеличилась на малую величину ΔT. Определите изменение температуры ΔT_2 в правой части сосуда и количество теплоты Q, переданное нагревателем.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для двух газов, связанных подвижным поршнем. Поршень без трения — давления слева и справа всегда равны. Поршень не проводит тепло, и сосуд теплоизолирован — правый газ тепла не получает, он сжимается *адиабатически*, и работа поршня целиком идёт в его внутреннюю энергию. Левый газ получает тепло Q, нагревается и расширяется. Нагрев малый — работаем с бесконечно малыми изменениями, давление при этом можно считать постоянным в работе $p\,dV$.

Обозначения. p — общее давление, V — объём каждой части в начале (температуры и количества газа равны, давления равны — объёмы тоже равны), T — начальная температура; dV_1 — увеличение объёма левой части, правой — $dV_2 = -dV_1$ (сосуд жёсткий); $dT_1 = \Delta T$, $dT_2 = \Delta T_2$; гелий одноатомный, $C_V = \frac{3}{2}R$.



Поршень сдвигается вправо: левый газ (подогреваемый) расширяется на dV_1, правый сжимается на столько же; давление одно

1. Уравнения состояния. Уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = RT$ (один моль) для левой и для правой частей, продифференцированное (изменения малые; давление dp меняется одинаково в обеих частях, потому что поршень без трения):

$$p\,dV_1 + V\,dp = R\,dT_1, \qquad -p\,dV_1 + V\,dp = R\,dT_2.$$

Вычитаем из первого второе — dp уходит:

$$2p\,dV_1 = R\,(dT_1 - dT_2).$$

2. Адиабата справа. Первое начало термодинамики для правого газа: тепла он не получает, $0 = \frac{3}{2}R\,dT_2 + p\,dV_2$, то есть работа поршня над ним идёт во внутреннюю энергию:

$$\frac{3}{2}R\,dT_2 = -p\,dV_2 = p\,dV_1.$$

Подставим $p\,dV_1$ из пункта 1:

$$\frac{3}{2}R\,dT_2 = \frac{R}{2}\,(dT_1 - dT_2) \quad \Rightarrow \quad 3\,dT_2 = dT_1 - dT_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_2 = \frac{\Delta T}{4}.$$

Знак плюс: правый газ сжимается и нагревается, хотя тепла не получает.

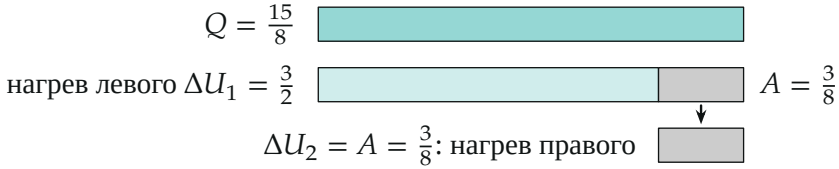
3. Теплота. Первое начало термодинамики для левого газа: тепло

идёт на нагрев и на работу против поршня, а эта работа — та самая $p\,dV_1$, что досталась правому газу:

$$Q = \frac{3}{2}R\,\Delta T + p\,dV_1 = \frac{3}{2}R\,\Delta T + \frac{3}{2}R\,\Delta T_2 = \frac{3}{2}R\,\Delta T\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}R\,\Delta T.$$

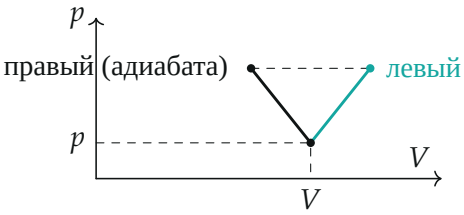
Второй способ: оба газа вместе с поршнем — теплоизолированная система с жёсткими стенками, внешней работы нет; всё тепло нагревателя — в суммарную внутреннюю энергию:

$$Q = \frac{3}{2}R\,(\Delta T + \Delta T_2) = \frac{3}{2}R\cdot\frac{5}{4}\Delta T = \frac{15}{8}R\,\Delta T.$$



Баланс энергии в единицах $R\,\Delta T$ (длины полос пропорциональны): из тепла Q на нагрев левого газа идёт $\frac{3}{2}$, а $\frac{3}{8}$ — работой поршня в правый газ

4. Проверка через уравнение адиабаты. Справа $pV_2^{5/3} = \text{const}$, откуда $dp/p = -\frac{5}{3}\,dV_2/V = \frac{5}{3}\,dV_1/V$. Из уравнений состояния: $dT_1/T = dp/p + dV_1/V = \frac{8}{3}\,dV_1/V$, $dT_2/T = dp/p - dV_1/V = \frac{2}{3}\,dV_1/V$; отношение $dT_2/dT_1 = \frac{2/3}{8/3} = \frac{1}{4}$ — совпадает.



Процессы на pV-диаграмме (схема, изменения сильно увеличены): давление растёт в обеих частях одинаково (наклоны $\pm\frac{5}{3}\,p/V$), левый газ расширяется, правый сжимается по адиабате

Обратите внимание: давление не постоянно — правый газ сжимается и давление растёт, поэтому левый газ нагревается не изобарно; его теплоёмкость в этом процессе $Q/\Delta T = \frac{15}{8}R$ — между $C_V = \frac{3}{2}R$ и $C_p = \frac{5}{2}R$.

Проверка. Размерность: $R\,\Delta T$ — Дж. Предел: если поршень закреплён — $dV_1 = 0$, $\Delta T_2 = 0$ и $Q = \frac{3}{2}R\,\Delta T$; с подвижным поршнем часть энергии уходит вправо, и Q больше. $\Delta T_2 > 0$ — правый газ сжат и нагрет, как и должно быть при адиабатном сжатии.

Смысл: четверть подведённого левому газу «нагрева» передаётся правому через работу поршня.

Ответ. $\Delta T_2 = \dfrac{\Delta T}{4}$; $Q = \dfrac{15}{8}R\,\Delta T$.