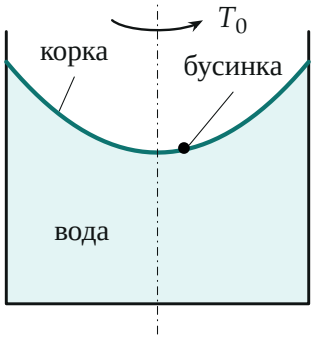
Айс

Задача 4. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Айс».

Вертикальный цилиндрический сосуд с водой равномерно вращается вокруг своей оси с периодом T_0; его быстро охлаждают, так что на поверхности появляется тонкая гладкая ледяная корка. На корку вблизи оси сосуда без начальной скорости помещают маленькую бусинку, которая может без трения скользить по поверхности. Найдите период T её малых колебаний.



Поясняющий рисунок: поверхность воды во вращающемся сосуде — параболоид; изгиб сильно преувеличен

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на малые колебания, и ключ к ней — форма корки. Корка застыла по форме поверхности вращающейся воды, а эта поверхность устроена так, что каждая частица воды на ней движется по окружности с угловой скоростью $\omega = 2\pi/T_0$. Значит, наклон поверхности на расстоянии r от оси «рассчитан» ровно на центростремительное ускорение $\omega^2 r$. Бусинка на такой гладкой поверхности получает горизонтальную возвращающую силу $m\omega^2 r$ — как от пружины жёсткостью $m\omega^2$, и её период — $2\pi/\omega = T_0$.

Обозначения. $\omega = 2\pi/T_0$ — угловая скорость сосуда; r — расстояние от оси; $z(r)$ — высота поверхности над её нижней точкой; α — угол наклона поверхности к горизонту, $\tan\alpha = dz/dr$; m — масса бусинки или элемента воды.

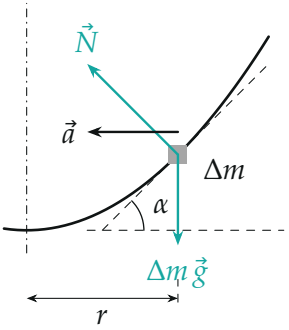
1. Форма поверхности воды. Возьмём маленький элемент воды массой Δm на поверхности на расстоянии r от оси. Давление на поверхности одинаково (атмосферное), поэтому со стороны остальной воды на элемент действует сила $\vec{N}$ по нормали к поверхности, а ещё — сила тяжести. Элемент движется по окружности, и второй закон Ньютона в проекциях на вертикаль и на горизонталь к оси:

$$N\cos\alpha = \Delta m\, g, \qquad N\sin\alpha = \Delta m\,\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Отсюда профиль поверхности:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

(парабола; это и есть $\rho g z = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$ — давление столба воды компенсирует «центробежный» перепад).

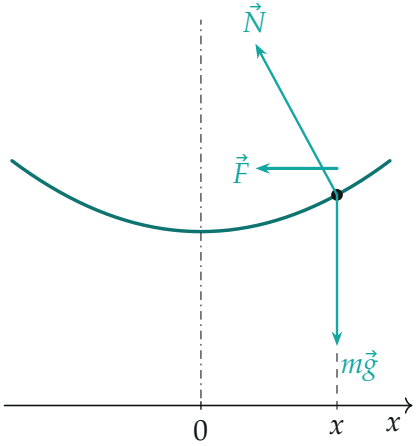


Элемент воды на поверхности: сумма $\vec{N}$ и $\Delta m\vec{g}$ даёт центростремительное ускорение $\omega^2 r$ к оси, поэтому $\tan\alpha = \omega^2 r/g$

2. Силы на бусинку. Корка тонкая и застыла в форме параболоида; трения нет, поэтому на бусинку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции корки $\vec{N}$ по нормали. Вращается ли сама корка, неважно: поверхность осесимметрична и гладкая, её поворот на бусинку не действует. Вблизи оси наклон мал ($\alpha \ll 1$): вертикальное движение бусинки — малая второго порядка, $N\cos\alpha \approx mg$. Второй закон Ньютона в проекции

на горизонтальную ось x (вдоль радиуса, через ось сосуда):

$$m\ddot{x} = -N\sin\alpha \approx -mg\tan\alpha = -mg\,\frac{\omega^2 x}{g} = -m\omega^2 x.$$



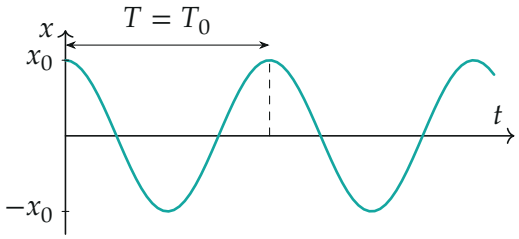
Бусинка на корке: равнодействующая $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$ горизонтальна (при малом наклоне) и равна $-m\omega^2 x$

3. Период. Получилось уравнение гармонических колебаний $\ddot{x} = -\omega^2 x$ с циклической частотой ω:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0.$$

Бусинка положена без начальной скорости (в неподвижной системе отсчёта) — она качается вдоль одного диаметра через ось. Если бы у неё была и скорость поперёк, то по второй оси уравнение то же, $\ddot{y} = -\omega^2 y$: бусинка шла бы по эллипсу, но с тем же периодом T_0.

Тот же результат через энергию: потенциальная энергия бусинки $mgz = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ совпадает с энергией пружины $\frac{1}{2}kx^2$ жёсткостью $k = m\omega^2$, а период пружинного маятника $2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi/\omega$.



$x(t) = x_0 \cos(2\pi t/T_0)$: бусинка проходит через ось и возвращается за время одного оборота сосуда

Обратите внимание: масса бусинки, ускорение свободного падения и даже форма сосуда в ответ не входят: поверхность сама «настроена» на ω. Ответ верен только для малых колебаний — при больших отклонениях вертикальная скорость уже не мала и период растёт.

Проверка. Размерность: $\tan\alpha = \omega^2 r/g$ безразмерен, $2\pi/\omega$ — секунды. Второй способ — в системе отсчёта сосуда: там вода покоится, а на бусинку, покоящуюся в этой системе, нормаль и сила тяжести вместе с центробежной силой $m\omega^2 r$ уравновешены при *любом* r — поверхность эквипотенциальна. Значит, без центробежной силы, в неподвижной системе, остаётся возвращающая сила $-m\omega^2 r$, как и получилось.

Смысл: бусинка на корке ведёт себя как «частица воды», у которой отняли вращение, и колеблется с частотой вращения сосуда.

Ответ. $T = T_0$.