Остановка частицы в магнитном поле

Задача 5. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Остановка частицы в магнитном поле».

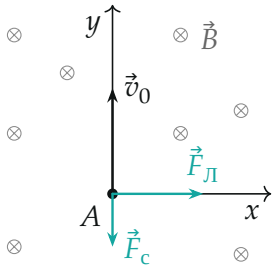
Маленькая частица с положительным зарядом q движется в однородном магнитном поле с индукцией B в вязкой среде. Сила сопротивления среды, действующая на частицу, прямо пропорциональна её скорости. В начальный момент времени импульс частицы равнялся p_0 и был направлен перпендикулярно линиям индукции. Вектор перемещения частицы к моменту, когда скорость частицы впервые оказалась противонаправлена начальной скорости, составляет острый угол φ с вектором $\vec{p}_0$.

1. Какой путь прошла частица до остановки?
2. Чему равен модуль перемещения частицы до остановки?

Силой тяжести пренебречь.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на движение заряда под действием силы Лоренца и силы вязкого трения, и решается она без дифференциальных уравнений — суммированием малых изменений. Сила Лоренца перпендикулярна скорости и только поворачивает её; сила сопротивления направлена против скорости и только уменьшает её модуль. Поэтому частица идёт по скручивающейся спирали и останавливается в её центре. Второй закон Ньютона в проекциях, умноженный на малое Δt, связывает изменения скорости с перемещениями ($v\,\Delta t = \Delta s$); после суммирования получаются простые линейные связи между скоростью и координатами, из которых и находятся путь и перемещение.

Обозначения. m — масса частицы, $\vec{v}_0 = \vec{p}_0/m$ — начальная скорость; сила сопротивления $\vec{F}_\text{с} = -b\vec{v}$; $k = qB/m$, $\alpha = b/m$ (обе величины — в с^{-1}); начало координат — в начальной точке A, ось y — по $\vec{v}_0$, ось x — по начальной силе Лоренца (поле $\vec{B}$ направлено от нас); S — путь до остановки, l — модуль перемещения.



Начальный момент: поле от нас, скорость вверх; сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ — вправо, сопротивление — против скорости

1. Второй закон Ньютона в проекциях. Сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ при $\vec{B}$ от нас имеет проекции $(qBv_y, -qBv_x)$ (проверка: при $\vec{v} = \vec{v}_0$ она направлена по $+x$, как выбрано). Второй закон Ньютона для частицы в проекциях на x и y:

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = qBv_y - bv_x, \qquad m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -qBv_x - bv_y.$$

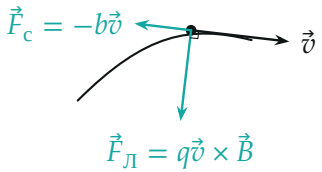
Делим на m и умножаем на Δt; $v_x\Delta t = \Delta x$, $v_y\Delta t = \Delta y$:

$$\Delta v_x = k\,\Delta y - \alpha\,\Delta x, \qquad \Delta v_y = -k\,\Delta x - \alpha\,\Delta y.$$

Суммируем от начала ($v_x = 0$, $v_y = v_0$, $x = y = 0$) до произвольного момента:

$$v_x = k\,y - \alpha\,x, \qquad v_y - v_0 = -k\,x - \alpha\,y.$$

Эти две связи верны в каждый момент движения.



В любой точке: $\vec{F}_Л \perp \vec{v}$ поворачивает скорость, $\vec{F}_c$ — против неё, уменьшает модуль

2. Что даёт угол φ. В момент, когда скорость впервые противонаправлена $\vec{v}_0$, она направлена по $-y$: $v_x = 0$. Из первой связи $ky = \alpha x$ в этой точке C, то есть вектор перемещения $\vec{AC}$ составляет с осью y (с $\vec{p}_0$) угол, для которого

$$\tan\varphi = \frac{x}{y} = \frac{k}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = k\cot\varphi.$$

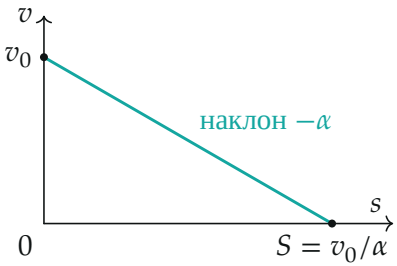
Угол φ острый, потому что k и α положительны: точка C в первой четверти.

Пункт 1. Путь. Сила Лоренца модуль скорости не меняет, меняет его только сопротивление. Второй закон Ньютона в проекции на направление скорости: $m\Delta v = -bv\Delta t$, то есть

$$\Delta v = -\alpha v\Delta t = -\alpha\Delta s.$$

Модуль скорости линейно убывает с пройденным путём. Суммируем от v_0 до нуля:

$$v_0 = \alpha S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{v_0}{\alpha} = \frac{v_0\tan\varphi}{k} = \frac{p_0\tan\varphi}{qB}.$$



Модуль скорости от пройденного пути — прямая; путь до остановки — точка пересечения с осью

Пункт 2. Перемещение. В точке остановки O $v_x = v_y = 0$. Обе связи из шага 1 дают систему для её координат x_0, y_0:

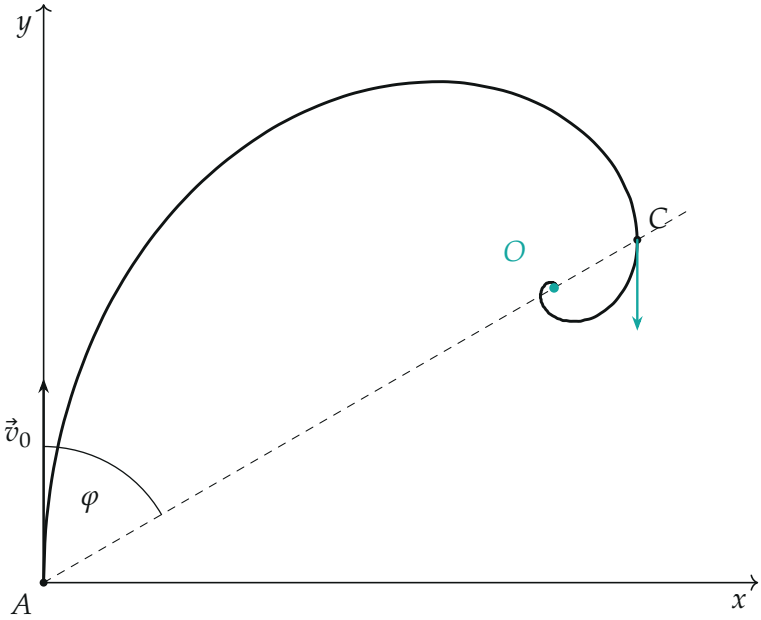
$$k y_0 = \alpha x_0, \qquad k x_0 + \alpha y_0 = v_0.$$

Из первой $y_0 = x_0 \cot\varphi$ — точка остановки лежит на той же прямой AC. Подставляем во вторую с $\alpha = k\cot\varphi$:

$$k\,x_0\,(1+\cot^2\varphi) = v_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{v_0}{k}\sin^2\varphi.$$

Перемещение направлено под углом φ к $\vec{p}_0$, его модуль

$$l = \frac{x_0}{\sin\varphi} = \frac{v_0}{k}\sin\varphi = \frac{p_0\sin\varphi}{qB}.$$



Траектория при $\varphi = 60°$ (расчёт python): в C скорость впервые направлена против $\vec{v}_0$; остановка O лежит на той же прямой AC

Обратите внимание: точка остановки и точка первого разворота лежат на одном луче из A — это следует из связи $v_x = ky - \alpha x$, которая в обеих точках даёт $v_x = 0$. Поэтому угол φ сразу задаёт и направление итогового перемещения.

Проверка. Размерность: $p_0/(qB)$ — (кг·м/с)/(Кл·Тл) = м (это радиус ларморовской окружности $R = p_0/(qB)$). Пределы: без сопротивления

$\alpha \to 0$, $\varphi \to 90°$ — частица вечно кружит по окружности радиуса R, путь $S = R\tan\varphi \to \infty$, а точка C — конец диаметра, $AC = 2R$ перпендикулярно $\vec{v}_0$, как и должно быть. Без поля $k \to 0$, $\varphi \to 0$: прямолинейное торможение, $S = l = v_0/\alpha$; наши формулы дают $S = R\tan\varphi \approx R\varphi$ и $l = R\sin\varphi \approx R\varphi$ — совпадают. Численный расчёт (python) для $\varphi = 60°$, $R = 1$: $S = 1{,}732 = \tan 60°$, $l = 0{,}866 = \sin 60°$, угол $\vec{AO}$ с $\vec{v}_0$ — $60{,}0°$.

Смысл: магнитное поле не меняет пути (тормозит только среда), но сворачивает траекторию, и перемещение в $1/\cos\varphi$ раз короче пути.

Ответ. 1) $S = \dfrac{p_0\tan\varphi}{qB}$; 2) $l = \dfrac{p_0\sin\varphi}{qB}$.