Гидроящик

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 9 класс, задача 1 (практический тур)] «Гидроящик».

Внутри шарика находятся вода и металлический цилиндр (воздух удалён). Развязывать или рвать шарик запрещено. (При нарушении этого требования за данное задание ставится ноль баллов). Массой и объёмом стенок шарика можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1\,000$ кг/м^3. Определите массу $m_ц$ металлического цилиндра, находящегося в шарике, и массу $m_в$ воды в шарике.

Оборудование: шарик с водой и металлическим цилиндром, стакан с водой, нитка, линейка, дополнительный груз массой $m = (50 \pm 1)$ г, стержень, закреплённый на краю стола (см. рисунок).

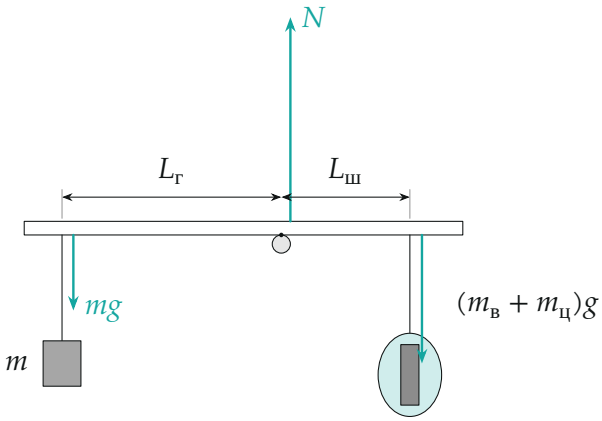


▲ **Решение. Что происходит.** Весов нет — есть рычаг: линейка, положенная на стержень, и груз известной массы. Правило моментов даёт массу всего шарика. Чтобы разделить её на воду и цилиндр, шарик взвешиваем ещё раз, целиком погрузив в воду: вода в шарике тогда «ничего не весит» (её вес уравновешен её же архимедовой силой), и рычаг чувствует только цилиндр, облегчённый на $\rho g V_ц$. Объём цилиндра измеряем линейкой прямо через оболочку.

Обозначения. $m = 50$ г — масса груза; $L_г$, $L_ш$ — плечи груза и шарика в воздухе, $L'_г$, $L'_ш$ — в воде (от стержня до нитей); h, d — высота и диаметр цилиндра, $V_ц$ — его объём.

1. Убираем массу линейки. Кладём линейку на стержень и двигаем, пока она не уравновесится: точка опоры оказалась под центром масс линейки. Во всех опытах линейка опирается на стержень именно этой точкой — тогда момент силы тяжести линейки относительно стержня равен нулю, и её масса в уравнения не входит.

2. Масса шарика целиком. Подвешиваем на нитях груз у одного края линейки и шарик у другого и передвигаем нити, пока линейка не уравновесится; плечи берём как можно больше — так меньше относительная погрешность измерения линейкой. На линейку действуют силы натяжения нитей, равные весам груза и шарика (тела висят неподвижно), и сила реакции стержня $\vec{N}$.



Взвешивание шарика в воздухе. Силы, действующие на линейку; длины стрелок и плеч — в масштабе опыта организаторов

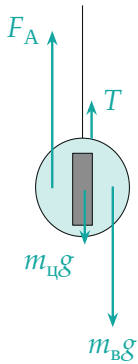
Правило моментов для линейки относительно оси стержня (момент $\vec{N}$ равен нулю — поэтому ось выбрана там):

$$mg\,L_г = (m_в + m_ц)g\,L_ш \quad \Rightarrow \quad m_в + m_ц = m\,\frac{L_г}{L_ш}.$$

Опыт организаторов: $L_г = 145$ мм, $L_ш = 85$ мм, $m_в + m_ц = 50 \cdot \frac{145}{85} = 85{,}3$ г.

3. Шарик в воде. Погружаем шарик целиком в стакан с водой (не касаясь дна и стенок) и снова уравновешиваем линейку. Рассмотрим сам

шарик с содержимым. На него действуют сила тяжести воды $m_в g$, сила тяжести цилиндра $m_ц g$, сила Архимеда на весь объём шарика $F_A = \rho g\,(V_в + V_ц)$ и натяжение нити T.



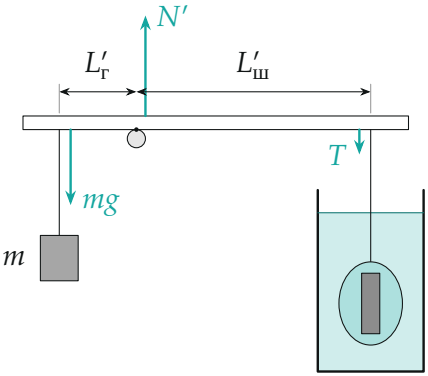
Шарик в воде: силы в масштабе ($m_в g \approx 0{,}61$ Н, $m_ц g \approx 0{,}24$ Н, $F_A \approx 0{,}69$ Н, $T \approx 0{,}16$ Н)

Вода в шарике сама по себе плавает в воде: $\rho g V_в = m_в g$ (оболочка невесома и тонка). Условие равновесия шарика (первый закон Ньютона в проекции на вертикаль):

$$T = m_в g + m_ц g - \rho g(V_в + V_ц) = m_ц g - \rho g V_ц.$$

Масса воды выпала — ради этого шарик и топим. Натяжение T передаётся на линейку; правило моментов:

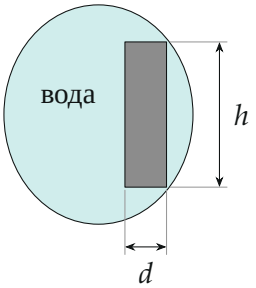
$$mg\,L'_г = (m_ц - \rho V_ц) g\,L'_ш \quad \Rightarrow \quad m_ц = m\,\frac{L'_г}{L'_ш} + \rho V_ц.$$



Взвешивание шарика в воде: плечо шарика стало втрое больше плеча груза, потому что на нить действует лишь «облегчённый» цилиндр

Опыт: $L'_г = 51$ мм, $L'_ш = 155$ мм, $m\,L'_г/L'_ш = 16{,}5$ г.

4. Объём цилиндра. Прижимаем цилиндр к оболочке шарика и линейкой через оболочку измеряем высоту и диаметр: $h = 48$ мм, $d = 14$ мм.



Цилиндр прижат к оболочке; высоту и диаметр измеряем через неё

$$V_ц = \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}4^2 \cdot 4{,}8}{4}\ \text{см}^3 = 7{,}4\ \text{см}^3, \qquad \rho V_ц = 7{,}4\ \text{г}.$$

5. Результат.

$$m_ц = 16{,}5 + 7{,}4 = 23{,}8\ \text{г}, \qquad m_в = 85{,}3 - 23{,}8 = 61{,}5\ \text{г}.$$

6. Погрешности. Относительные погрешности произведения и частного складываются; линейкой меряем с точностью 1 мм:

$$\Delta m_{\text{ц}} = m\frac{L'_{\text{г}}}{L'_{\text{ш}}}\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L'_{\text{г}}}{L'_{\text{г}}} + \frac{\Delta L'_{\text{ш}}}{L'_{\text{ш}}}\right) + \rho V_{\text{ц}}\left(\frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta d}{d}\right)$$

$$= 16{,}5\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \frac{1}{155}\right) + 7{,}4\left(\frac{1}{48} + \frac{2}{14}\right) = 0{,}8 + 1{,}2 \approx 2 \text{ г},$$

$$\Delta m_{\text{в}} = 85{,}3\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{145} + \frac{1}{85}\right) + \Delta m_{\text{ц}} = 3{,}3 + 2{,}0 \approx 5 \text{ г}.$$

Главный вклад — диаметр цилиндра: он мал, а входит в квадрате.

Обратите внимание: шарик в воде должен висеть свободно — коснётся дна или стенки стакана, и часть веса заберёт их реакция. И в воздухе, и в воде линейка опирается одной и той же точкой — под своим центром масс, иначе в правило моментов добавится неизвестный момент её силы тяжести.

Проверка. Плотность цилиндра $m_{\text{ц}}/V_{\text{ц}} = 23{,}8/7{,}4 \approx 3{,}2$ г/см^3 — меньше стали, но в пределах погрешности объёма ($\pm 15\%$) это лёгкий металл вроде алюминия или дюралюминия (2,7–2,8 г/см^3); результат правдоподобен. Предельный случай: без цилиндра ($V_{\text{ц}} \to 0$, $m_{\text{ц}} \to 0$) натяжение в воде $T \to 0$ — шарик с водой в воде невесом, как и должно быть.

У организаторов в формуле погрешности стоит 60 вместо массы груза 50 г — опечатка; на ответ (± 2 г) она не влияет.

Ответ. $m_{\text{ц}} = m\dfrac{L'_{\text{г}}}{L'_{\text{ш}}} + \rho\dfrac{\pi d^2 h}{4} = (24 \pm 2)$ г; $\quad m_{\text{в}} = m\dfrac{L_{\text{г}}}{L_{\text{ш}}} - m_{\text{ц}} = (62 \pm 5)$ г (по данным организаторов).