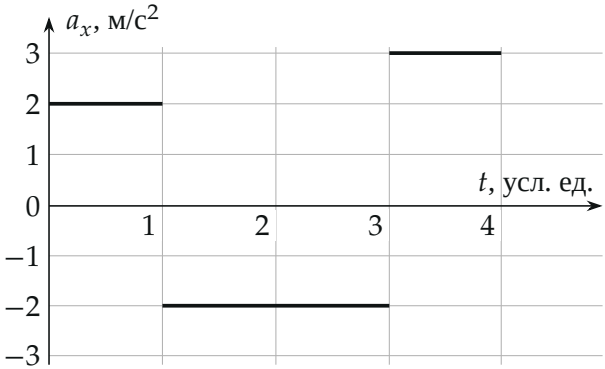
До остановки

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 9 класс, задача 1] «До остановки».

Две частицы движутся вдоль оси OX. Зависимости их ускорений a_x от времени оказались одинаковыми (см. рис.). За все время наблюдений проекция скорости v_x каждой из частиц ровно один раз обращалась в ноль, а пройденные ими пути отличались на $\Delta S = 16$ см. Определите пути S_1 и S_2, пройденные частицами, и время τ их движения.



▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение одинаковое, значит, *изменение* скорости $\Delta v_x(t)$ у частиц одно и то же, а отличаются они только начальной скоростью v_0: график $v_x(t)$ — это один и тот же график $\Delta v_x(t)$, сдвинутый по вертикали на v_0. Условие «скорость обращалась в ноль ровно один раз» выделяет ровно два таких сдвига — это и есть две частицы. Путь — площадь между графиком $v_x(t)$ и осью времени (без учёта знака). Единица времени на графике неизвестна — её даст разность путей. Класс задачи — кинематика по графикам.

Обозначения. t_0 — длительность одной клетки по времени (одной «условной единицы»); $a = 2$ м/с^2 — ускорение на первом участке; v_0 — начальная скорость частицы.

1. График изменения скорости. На каждом участке ускорение постоянно, и изменение скорости — площадь под графиком $a_x(t)$: $\Delta v = a_x \Delta t$.

В единицах at_0:

участок	a_x	Δv на участке	Δv_x в конце
$0 \dots t_0$	a	$+at_0$	at_0
$t_0 \dots 3t_0$	$-a$	$-2at_0$	$-at_0$
$3t_0 \dots 4t_0$	$1{,}5a$	$+1{,}5at_0$	$0{,}5at_0$

Внутри участка Δv_x меняется линейно — график ломаная (рис. 1).

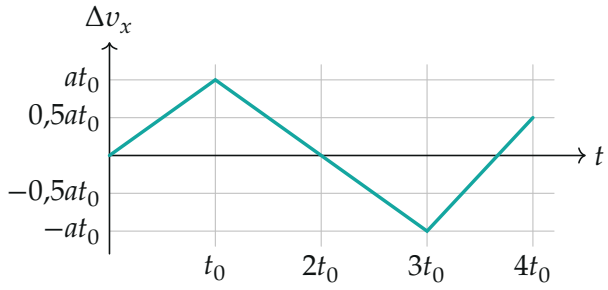


Рис. 1. Изменение скорости $\Delta v_x(t) = v_x(t) - v_0$ — одно на обе частицы. Наибольшее значение at_0 (в момент t_0), наименьшее $-at_0$ (в момент $3t_0$).

2. Какие сдвиги дают ровно одну остановку. $v_x(t) = v_0 + \Delta v_x(t)$; нули v_x — точки, где ломаная рис. 1 пересекает уровень $-v_0$. Пройдём по уровням:

- $|v_0| > at_0$: ломаная уровня не достигает — остановок нет;
- $0{,}5at_0 < v_0 < at_0$ или $-at_0 < v_0 < -0{,}5at_0$: два пересечения (рис. 2, серая линия);
- $|v_0| \le 0{,}5at_0$: три пересечения (или касание конца графика);
- $v_0 = +at_0$: ломаная только *касается* уровня $-at_0$ в момент $3t_0$ — одна остановка;
- $v_0 = -at_0$: ломаная касается уровня $+at_0$ в момент t_0 — одна остановка.

Значит, у одной частицы $v_0 = +at_0$, у другой $v_0 = -at_0$ (рис. 3). Остановка у обеих — касание: скорость доходит до нуля и снова растёт по модулю, не меняя знака.

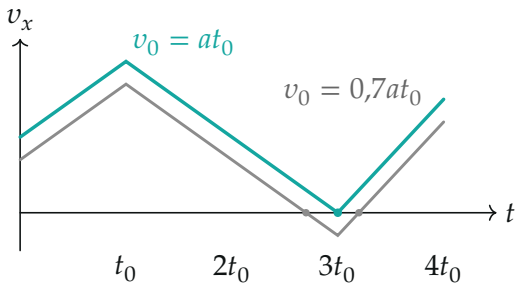


Рис. 2. Сдвиг $v_0 = at_0$ (бирюзовая) — скорость касается нуля один раз в момент $3t_0$. Чуть меньший сдвиг (серая, $v_0 = 0{,}7at_0$) — уже два нуля.

3. Пути — площади под $|v_x(t)|$. Скорость частиц не меняет знака, путь — площадь между графиком и осью. На каждом участке скорость линейна, площадь — трапеция: $\frac{|v_{\text{нач}}|+|v_{\text{кон}}|}{2}\Delta t$. Значения скорости в моменты $0, t_0, 2t_0, 3t_0, 4t_0$ (в единицах at_0):

$$\begin{aligned} v_0 = +at_0:&\quad 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1{,}5;\\ S_{(+)} &= (1{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 0{,}75)\, at_0^2 = 4{,}25\, at_0^2;\\ v_0 = -at_0:&\quad -1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -0{,}5;\\ S_{(-)} &= (0{,}5 + 0{,}5 + 1{,}5 + 1{,}25)\, at_0^2 = 3{,}75\, at_0^2. \end{aligned}$$

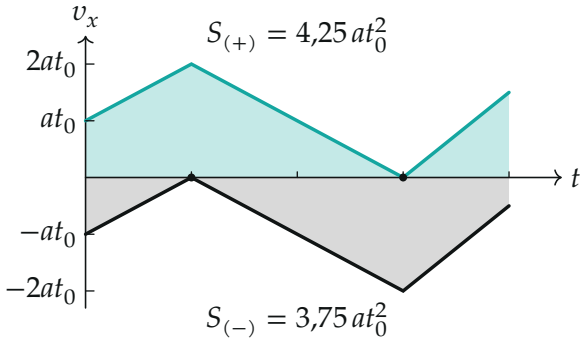


Рис. 3. Скорости двух частиц. Бирюзовая площадь — путь частицы с $v_0 = +at_0$ (остановка в $3t_0$), серая — с $v_0 = -at_0$ (остановка в t_0). Точки — остановки.

4. Масштаб времени. Разность путей

$$\Delta S = S_{(+)} - S_{(-)} = 0{,}5\,at_0^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2\Delta S}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}16}{2}} = 0{,}4 \text{ с}.$$

Время движения $\tau = 4t_0 = 1{,}6$ с. Пути: $at_0^2 = 2\cdot 0{,}16 = 0{,}32$ м, и

$$S_1 = 4{,}25\cdot 0{,}32 = 1{,}36 \text{ м}, \qquad S_2 = 3{,}75\cdot 0{,}32 = 1{,}20 \text{ м}.$$

Обратите внимание. «Ровно один раз обращалась в ноль» включает касание: в момент остановки скорость не меняет знак, частица на мгновение останавливается и продолжает движение в ту же сторону. Если бы условие требовало смены направления, подходящего сдвига не было бы вовсе.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Разность путей $1{,}36-1{,}20 = 0{,}16$ м совпадает с условием. Перемещения частиц: $(1{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 0{,}75) = 4{,}25$ и $-3{,}75$ в единицах at_0^2 — они отличаются на v_0-вклад $2at_0\cdot 4t_0 = 8at_0^2$: $4{,}25 + 3{,}75 = 8$, сходится.

Ответ. $\tau = 1{,}6$ с; $S_1 = 1{,}36$ м, $S_2 = 1{,}20$ м.