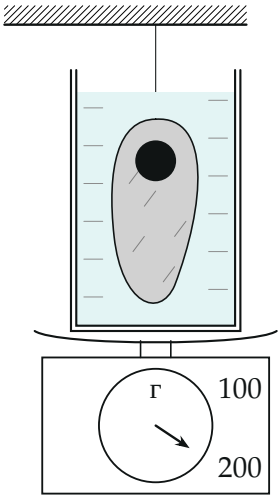
Наморозили

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Наморозили».

На весах установлен калориметр с водой при температуре $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. Весы показывают при этом $m_1 = 100$ г. В воду опускают стальной шарик, закреплённый на нити, с намерзшим на нём толстым слоем льда, который полностью погружен в воду. Показания весов увеличиваются до значения $m_2 = 201{,}3$ г. После установления теплового равновесия в калориметре (на этом этапе теплообменом с окружающей средой можно пренебречь) показания весов ещё немного возрастают до $m_3 = 204{,}45$ г. Через большой промежуток времени, когда содержимое калориметра нагрелось до комнатной температуры, весы показали $m_4 = 191{,}3$ г. Определите массу $m_\text{с}$ стального шарика, массу $m_\text{л}$ льда на нём перед опусканием в калориметр, их температуру t перед погружением в воду. Удельная теплоёмкость стали $c_\text{с} = 450$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_\text{л} = 2100$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотность стали $\rho_\text{с} = 7800$ кг/м^3, плотность льда $\rho_\text{л} = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_\text{в} = 1000$ кг/м^3.



▲ **Решение. Что происходит.** Весы показывают силу, с которой калориметр давит на чашу. Тело на нити в воду не ставят на дно — оно давит на

воду только через силу Архимеда, и по третьему закону Ньютона вода давит на дно сильнее ровно на эту силу. Поэтому прибавка показаний — это масса воды в объёме погружённого тела. Холодный лёд со сталью замораживает на себе часть воды при $0\,^\circ\mathrm{C}$: масса в сосуде та же, а объём погружённого тела растёт — показания растут. Когда весь лёд растаял, остались шарик и вода. Четыре показания весов дают три уравнения для масс, а уравнение теплового баланса — температуру. Класс задачи — закон Архимеда и тепловой баланс с фазовым переходом.

Обозначения. $V_\text{с} = m_\text{с}/\rho_\text{с}$, $V_\text{л} = m_\text{л}/\rho_\text{л}$ — объёмы шарика и начального льда; $\Delta m_\text{л}$ — масса воды, намёрзшей в калориметре; показания весов — в граммах, как массы.

1. Что показывают весы, когда тело висит в воде. Силы на тело (рис. 1): тяжесть, натяжение нити, сила Архимеда $F_A = \rho_\text{в} g V$, где V — объём тела. По третьему закону Ньютона тело действует на воду силой F_A вниз, и эта сила через дно передаётся на весы. Показание весов (в граммах):

$$m = m_\text{сосуда с водой} + \rho_\text{в} V.$$

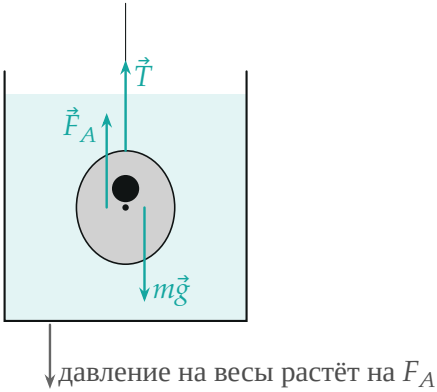


Рис. 1. Силы на тело в воде, $m = m_c + m_л$. Нить держит часть веса, а вода — силу Архимеда; её противодействие давит через воду на дно и весы.

2. Четыре показания весов (рис. 2). Исходно: m_1 — калориметр с водой.

- Тело опустили:

$$m_2 = m_1 + \rho_в\left(\frac{m_с}{\rho_с} + \frac{m_л}{\rho_л}\right). \qquad (1)$$

- Намёрзло $\Delta m_л$ воды: из воды ушло $\Delta m_л$, а погружённый объём вырос на $\Delta m_л/\rho_л$:

$$m_3 - m_2 = -\Delta m_л + \rho_в\frac{\Delta m_л}{\rho_л} = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л}\,\Delta m_л. \qquad (2)$$

- Весь лёд растаял: в воде добавилась масса всего льда, в том числе намёрзшего, а в погружённом объёме остался только шарик:

$$m_4 = m_1 + m_л + \rho_в\frac{m_с}{\rho_с} \quad \Rightarrow \quad m_2 - m_4 = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л}\,m_л. \qquad (3)$$

Намёрзший лёд на m_4 не влияет: он образовался из воды калориметра и вернулся в неё.

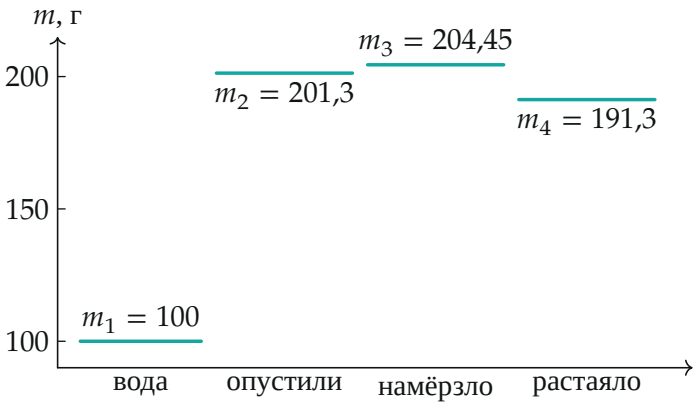


Рис. 2. Показания весов на четырёх этапах. Скачок $m_1 \to m_2$ — вода в объёме тела, $m_2 \to m_3$ — намерзание ($+\frac{1}{9}\Delta m_л$), $m_2 \to m_4$ — таяние начального льда ($-\frac{1}{9}m_л$).

3. Массы. Множитель $\frac{\rho_в-\rho_л}{\rho_л} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$. Из (3):

$$m_л = 9\,(m_2 - m_4) = 9 \cdot 10{,}0 = 90 \text{ г}.$$

Из (1): объём тела $V_с + V_л = \frac{m_2 - m_1}{\rho_в} = 101{,}3$ см^3, объём льда $V_л = \frac{90}{0{,}9} = 100$ см^3, значит, $V_с = 1{,}3$ см^3 и

$$m_с = \rho_с V_с = 7{,}8 \cdot 1{,}3 \approx 10{,}1 \text{ г}.$$

Из (2): $\Delta m_л = 9\,(m_3 - m_2) = 9 \cdot 3{,}15 = 28{,}35$ г.

4. Тепловой баланс. Пока устанавливается равновесие, теплообмена с окружающей средой нет. Вода остаётся при 0 °C (часть её замерзает), шарик со льдом нагреваются от t до 0 °C (рис. 3). Уравнение теплового баланса: теплота, отданная замерзающей водой, равна теплоте, полученной шариком и льдом:

$$\lambda\,\Delta m_л = (c_с m_с + c_л m_л)(0 - t) \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\lambda\,\Delta m_л}{c_с m_с + c_л m_л}.$$

Числа (в СИ): $\lambda \Delta m_л = 3{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}02835 = 9640$ Дж, $c_с m_с + c_л m_л = 450 \cdot 0{,}0101 + 2100 \cdot 0{,}090 = 4{,}6 + 189 = 193{,}6$ Дж/°C,

$$t = -\frac{9640}{193{,}6} \approx -49{,}8\,^\circ\text{C} \approx -50\,^\circ\text{C}.$$

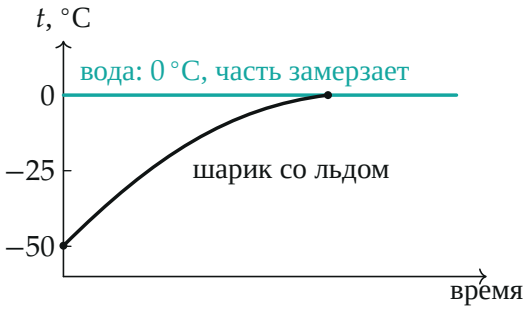


Рис. 3. Пока устанавливается равновесие: шарик со льдом нагреваются до 0 °C, вода остаётся при 0 °C и отдаёт теплоту, замерзая на поверхности льда.

Обратите внимание. Средняя плотность тела $\frac{100{,}1 \text{ г}}{101{,}3 \text{ см}^3} \approx 0{,}99$ г/см^3 меньше плотности воды — без нити и упора сверху оно бы всплыло;

условие говорит, что оно погружено целиком, и все формулы пишем для полного погружения. Если бы тело плавало, выступающая часть была бы около 1% объёма, и ответ изменился бы примерно на 1%.

Проверка. Подставим ответ в показания: $m_2 = 100 + 1{,}3 + 100 = 201{,}3$ г; $m_3 = 201{,}3 + 28{,}35/9 = 204{,}45$ г; $m_4 = 100 + 90 + 1{,}3 = 191{,}3$ г — все три сходятся. Знак $t < 0$: лёд должен быть холоднее 0 °C, иначе вода на нём не намерзала бы.

Ответ. $m_л = \dfrac{\rho_л(m_2 - m_4)}{\rho_в - \rho_л} = 90$ г; $m_с = \rho_с\left(\dfrac{m_2 - m_1}{\rho_в} - \dfrac{m_л}{\rho_л}\right) \approx 10{,}1$ г; $t = -\dfrac{\lambda\,\Delta m_л}{c_с m_с + c_л m_л} \approx -50$ °C (намёрзло $\Delta m_л \approx 28{,}4$ г).