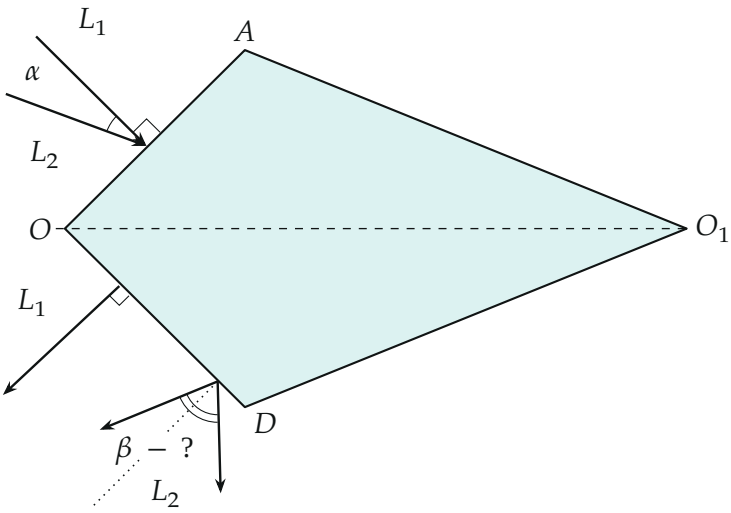
# Тетрагон

**Задача 4.** [ВсОШ 2018/19, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Тетрагон».

Основание стеклянной призмы имеет форму четырёхугольника $OAO_1D$ (см. рисунок). Угол $AOD$ — прямой. Призма симметрична относительно плоскости, содержащей $OO_1$ и перпендикулярной основанию. Луч $L_1$ нормально падает на грань $OA$ и после отражений на гранях $DO_1$ и $AO_1$ выходит через грань $OD$ так же под прямым углом к ней. Луч $L_2$ падает на грань $OA$ под углом $\alpha$ к нормали. Под каким углом $\beta$ относительно нормали к грани $OD$ он выйдет из призмы после отражений на гранях $DO_1$ и $AO_1$? Все лучи и перпендикуляры к граням призмы лежат в плоскости $OAO_1D$.




▲ **Решение. Что происходит.** Внутри призмы луч дважды отражается от граней $DO_1$ и $AO_1$ — это два плоских зеркала под углом друг к другу. У пары зеркал есть замечательное свойство: два отражения подряд поворачивают направление луча на один и тот же угол, *какой бы ни была исходная направленность луча*. Луч $L_1$ показывает, на какой угол: нормаль к $OA$ переходит в нормаль к $OD$. Значит, любой луч, шедший внутри под углом $\alpha'$ к нормали к $OA$, после двух отражений идёт под тем же

углом $\alpha'$ к нормали к $OD$, и закон преломления на выходе возвращает исходный угол. Класс задачи — геометрическая оптика: отражение и преломление, система двух зеркал.

**Обозначения.** $n$ — показатель преломления стекла; $\alpha'$ — угол преломления луча $L_2$ на грани $OA$; $\gamma$ — угол $AO_1D$; $B$, $C$ (у $L_2$ — $B_1$, $C_1$) — точки отражения на гранях $AO_1$ и $DO_1$; $E$ — точка на $OO_1$, где пересекаются отрезки хода $L_1$.

**1. Ход луча $L_1$.** На грани $OA$ луч падает по нормали — не преломляется и идёт внутри перпендикулярно $OA$, то есть параллельно $OD$ (угол $AOD$ прямой). Выходит он по нормали к $OD$, то есть параллельно $OA$. Призма и ход луча симметричны относительно $OO_1$: отрезки хода до первого и после второго отражения пересекаются на оси в точке $E$ под прямым углом, отрезок $CB$ перпендикулярен оси (рис. 1). Треугольник $BEC$ прямоугольный и равнобедренный: $\angle EBC = \angle ECB = 45°$. Угол падения на грани равен половине угла между падающим и отражённым лучами, $\frac{45°}{2} = 22{,}5°$, и из суммы углов четырёхугольника $EBO_1C$ получаем $\gamma = 45°$.

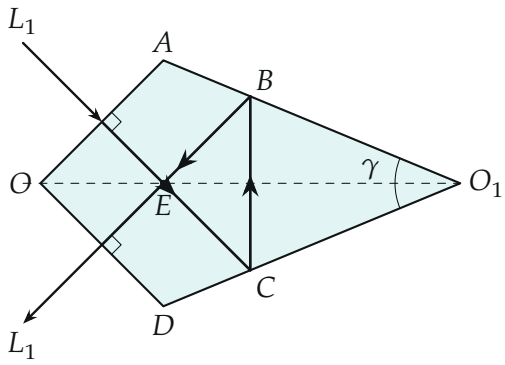



*Рис. 1. Ход луча $L_1$ (рассчитан для $\gamma = 45°$). Вход и выход — по нормали, отрезки хода пересекаются на оси в точке $E$ под прямым углом, $CB \perp OO_1$.*

**2. Два отражения — поворот.** Закон отражения от плоского зеркала: угол отражения равен углу падения. В угловой мере направлений это значит: зеркало, идущее под углом $\theta_1$ к выбранной оси, переводит направление луча $\varphi$ в $2\theta_1 - \varphi$ (отражение направления относительно

линии зеркала). Второе зеркало (угол $\theta_2$) переводит $2\theta_1 - \varphi$ в

$$2\theta_2 - (2\theta_1 - \varphi) = \varphi + 2(\theta_2 - \theta_1).$$

Итог — поворот на $2(\theta_2 - \theta_1)$, удвоенный угол между зеркалами, и **от $\varphi$ он не зависит** (рис. 2). У $L_1$ направление внутри было «по нормали к $OA$ внутрь», стало «по нормали к $OD$ наружу»: это поворот на 90° (отсюда снова $2\gamma = 90°$).

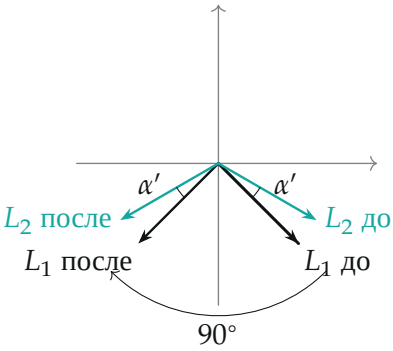



*Рис. 2. Направления лучей внутри призмы, отложенные из одной точки. Пара зеркал поворачивает любое направление на одинаковый угол (90°): угол $\alpha'$ между $L_2$ и $L_1$ до отражений сохраняется и после. Нарисовано для $n = 1{,}5$, $\alpha = 15°$ ($\alpha' \approx 10°$, угол увеличен для наглядности).*

**3. Ход луча $L_2$.** Закон преломления на грани $OA$: $\sin\alpha = n\sin\alpha'$. Внутри луч $L_2$ идёт под углом $\alpha'$ к направлению $L_1$ (нормали к $OA$). После двух отражений оба направления повернулись на один угол 90°, и угол между ними остался $\alpha'$; направление $L_1$ теперь — нормаль к $OD$. Значит, $L_2$ падает изнутри на грань $OD$ под углом $\alpha'$ к нормали. Закон преломления на выходе:

$$\sin\beta = n\sin\alpha' = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha.$$

Луч выходит симметрично входящему относительно оси $OO_1$ (рис. 3).

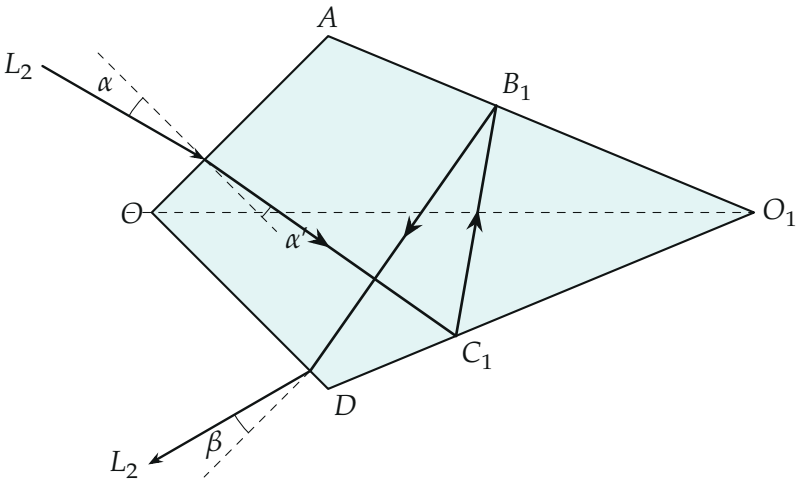



*Рис. 3. Ход луча $L_2$, рассчитанный для $n = 1{,}5$, $\alpha = 15°$: угол преломления $\alpha' = 9{,}9°$, на выходе $\beta = 15{,}0°$. Пунктир — нормали к граням $OA$ и $OD$.*

**Обратите внимание.** Ответ не зависит ни от показателя преломления, ни от точки входа, ни от угла $\gamma$: всё, что нужно, — что пара зеркал поворачивает все лучи одинаково, а поворот для нормальных направлений задан лучом $L_1$. Ход справедлив, пока луч $L_2$ отражается ровно по одному разу от $DO_1$ и $AO_1$ (при большом $\alpha$ он может отразиться от $DO_1$ второй раз).

**Проверка.** Численный расчёт хода (рис. 3) для $n = 1{,}5$ и $\alpha = 10°$, $15°$, $20°$ при разных точках входа даёт $\beta = 10{,}0°$, $15{,}0°$, $20{,}0°$. Предел $\alpha = 0$ даёт $\beta = 0$ — это луч $L_1$. Второй способ (как у организаторов): суммы углов в четырёхугольниках $AB_1C_1D$ и $ABCD$ равны, значит, $\angle E_1B_1O_1 + \angle E_1C_1O_1 = \angle EBO_1 + \angle ECO_1$, и лучи $L_2$ до и после отражений тоже пересекаются под прямым углом — тот же поворот на $90°$.

**Ответ.** $\beta = \alpha$ (не зависит от показателя преломления стекла).